



GOP Gabinete de Organização e Projectos, Lda

# Resistência ao Esforço Transverso

Estudo Técnico

Julho de 2012

Elaborado por:

João Maria Sobreira

Com a colaboração de:

Jorge Nunes da Silva

Jorge Ribeirinho Soares



## ***Prefácio***

O Corte no Betão Armado é um tema em estudo e discussão desde finais do séc. XIX e é uma área do conhecimento que se encontra em constante actualização.

O GOP, desde a sua constituição tem estudado este assunto através do seu fundador, o Eng. Araújo Sobreira, que elaborou a primeira publicação dedicada a este tema, datada de 1980, com a colaboração do Eng. João Maria Sobreira.

Posteriormente, estes estudos têm sido actualizados e comparados com a regulamentação pelo Eng. João Maria Sobreira com a colaboração do Eng. Nunes da Silva.

Recentemente, dada a necessidade de actualização do modelo e o aparecimento de novas abordagens a este problema preconizadas pelo primeiro Draft do Model Code de 2010, foi realizado o estudo aqui apresentado.



# Índice Geral

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	1
1.2. MOTIVAÇÃO.....	2
1.3. ANEXOS .....	3
 <b>2. ANÁLISE DA COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES ENTRE OS TIRANTES E AS ESCORAS DA TRELIÇA .....</b>	<b>5</b>
2.1. ESQUEMA DO MODELO ADOPTADO .....	5
2.2. COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES.....	6
 <b>3. ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA ARMADURA LONGITUDINAL SOBRE O ESFORÇO TRANSVERSO JUNTO AOS APOIOS.....</b>	<b>ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.</b>
3.1. INFLUÊNCIA DA ARMADURA LONGITUDINAL SOBRE O ESFORÇO TRANSVERSO JUNTO AOS APOIOS ..	9
3.2. DEFINIÇÃO DO TIRANTE DE BETÃO.....	18
3.3. RESISTÊNCIA ÚLTIMA AO ESFORÇO TRANSVERSO DE VIGAS SEM ARMADURA DE ALMA .....	22
 <b>4. RESISTÊNCIA AO ESFORÇO TRANSVERSO DE VIGAS DE BETÃO ARMADO .....</b>	<b>25</b>
4.1. RESISTÊNCIA AO ESFORÇO TRANSVERSO DE VIGAS SEM ARMADURA DE ESFORÇO TRANSVERSO.....	25
4.2. RESISTÊNCIA AO ESFORÇO TRANSVERSO DE VIGAS COM ARMADURA DE ESFORÇO TRANSVERSO...	26
 <b>5. EXEMPLOS RETIRADOS DA FOLHA DE CÁLCULO .....</b>	<b>29</b>
 <b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>31</b>
6.1. TIRANTES DE BETÃO .....	31
6.2. ARMADURA LONGITUDINAL DE TRACÇÃO .....	32
6.3. VALOR MÁXIMO DE $V_{RD}$ .....	32
 <b>ANEXOS .....</b>	<b>35</b>





# 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Uma viga ou outra peça de betão sujeita a esforços exteriores  $M$  (momento),  $N$  (axial) e  $V$  (transverso) fica enquanto em estado elástico (Estádio I) sujeita às regras da Resistência de Materiais desenvolvendo-se nas faces de um elemento do seu interior tensões normais  $\sigma$  e tangenciais  $\tau$  que, segundo a circulo de Mohr, à medida que esse elemento roda de um ângulo  $\varphi$  variam de valor (ver Figura 1.1).

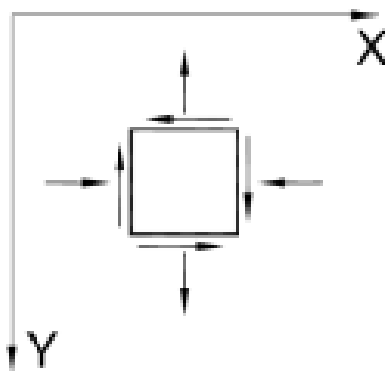


Fig.1.1 – Tensões normais e tangenciais numa faceta, segundo a circunferência de Mohr.

Ainda segundo a circunferência de Mohr, para um dado ângulo  $\varphi$  as tensões tangenciais nas faces do elemento serão nulas e as tensões normais terão valores máximos (direções principais de tensão), sendo uma direcção de tracção e outra (normal) será de compressão. Aumentando os esforços exteriores o valor destas tensões aumentará até um momento em

que as tensões de tracção (principais) atingem um valor superior ao da resistência à tracção do betão originando a sua rotura e a respectiva formação de fissuras com a direcção das tensões principais de compressão.

Entre as fissuras formam-se elementos de betão comprimido (escoras) e para que esta peça mantenha coerência estrutural, é necessário que na direcção das tensões de tracção se introduzam armaduras (estribos ou varões inclinados) de aço de forma a evitar a abertura de fissuras (ver figura 1.2).

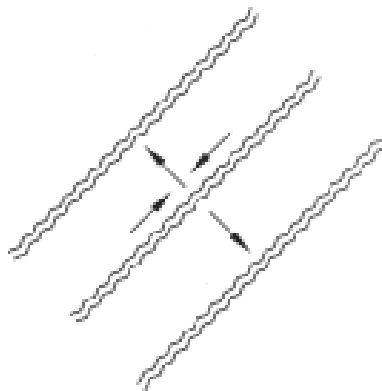


Fig.1.2 – Fendas de tracção.

É para explicar o que se passa a partir deste momento (Estádio II) que se têm desenvolvido ao longo dos anos diversas teorias, umas baseadas na experimentação e outras procurando modelos estruturais que originem resultados que sejam o mais próximo possível dos resultados dos muitos ensaios laboratoriais.

## 1.2. MOTIVAÇÃO

Apresenta-se neste estudo uma teoria do estado limite de rotura ao esforço transversal.

Através do estudo sobre fissuração é possível concluir que a armadura embebida no betão origina uma variação na parcela da resistência atribuída ao betão pelo REBAP,  $V_{cd}$ , que não é constante em elementos armados transversalmente, sendo o seu valor inversamente





variável com a percentagem desta armadura. Este pressuposto assim como a possibilidade de variação da inclinação das escoras e a comprovação da possibilidade da existência de um tirante de betão, pela compatibilidade de deformações numa viga, permitiram desenvolver a teoria aqui exposta.

Os ensaios mostram, que para certas condições se pode obter uma mesma resistência última utilizando muito menos armadura transversal do que a exigida pela teoria clássica de Mörsch. De forma a tentar contornar este problema o REBAP propôs uma teoria de Mörsch modificada através de uma parcela  $V_{cd}$ . Já o Eurocódigo propôs um modelo estrutural bastante diferente baseado no modelo de escoras e tirantes no qual se despreza a influência do betão na resistência global. Recentemente, o Model Code propôs a coexistência da parcela do betão em conjunto com a inclinação das bielas calculando ambas através da Modified Compression Field Theory.

Em síntese, a teoria de rotura aqui exposta baseia-se na hipótese de que a parcela correspondente ao betão, resulta da existência de tirantes transversais de betão que são mobilizados, quer pela compatibilização da deformação vertical das diagonais cruzadas do esquema em treliça de Mörsch, quer pela formação de um esquema estrutural atirantado que a existência de armadura longitudinal possibilita. Estes dois esquemas estruturais coexistirão na medida em que as armaduras de que dependem forem convenientemente dimensionadas e as condições de apoio, carga e vão o permitam.

O estudo agora apresentado permite a fácil interpretação dos critérios empíricos adoptados na actual regulamentação e impostos como consequência dos ensaios experimentais, apesar das aparentes contradições teóricas que por vezes originam e fornece resultados idênticos aos obtidos experimentalmente. Respeitando os habituais critérios de segurança, permite o aproveitamento da resistência do betão.

### **1.3. ANEXOS**

Juntam-se no final do estudo três anexos, sendo que o primeiro diz respeito a uma revisão bibliográfica (Elementos do livro “CONSTRUÇÕES DE BETÃO” DE LEONHARDT, ANALOGIA CLÁSSICA DE MORSCH, MODEL CODE DE 2010, EC2 E O MODELO DE ESCORAS E TIRANTES) onde se inclui alguns estudos e códigos



## Resistência ao Esforço Transverso

---

referidos neste trabalho, o segundo anexo aborda o tema esforço transversal com compressão. O terceiro anexo diz respeito à variação da área crítica devido ao recobrimento das armaduras. Pretendemos em breve juntar novos anexos sobre a relação do esforço transversal com outros esforços nomeadamente a torção.

# 2

## ANÁLISE DA COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES ENTRE OS TIRANTES E AS ESCORAS DA TRELIÇA

### 2.1. ESQUEMA DO MODELO ADOPTADO

Neste capítulo procura-se verificar se a compatibilidade de deformações entre escoras e tirantes de aço, mobiliza ou não a formação de tirantes verticais de betão.

O modelo estrutural adoptado é de acordo com o modelo clássico constituído por um banzo comprimido e um traccionado ligado entre si por diagonais comprimidas e traccionadas designadas de escoras e tirantes. Em estado limite último formam-se como vimos fendas com a direcção das escoras que terão de ser intersectadas pelos tirantes de aço (constituídos por armaduras envolvidas por betão colaborante).

Para que o esquema estrutural funcione o afastamento máximo entre os tirantes (varões inclinados ou estribos) deverá ser  $s = z(\cot \beta + \cot \alpha)/2$  garantindo que todas as fissuras são intersectadas por armaduras (podendo em  $s$  existir mais do que um varão). Recorde-se que, o valor de  $s$  aqui adoptado resulta da necessidade de intersectar sempre cada biela por, pelo menos, um tirante (ver Figura 2.1).

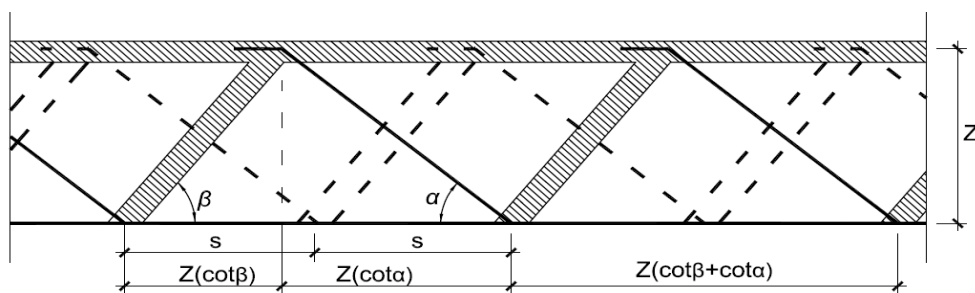


Fig.2.1 – Modelo Estrutural de Compatibilidade de Deformações.



## 2.2. COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES

A partir da componente vertical da deformação do ponto de cruzamento entre uma escora e um tirante, podemos relacionar as forças  $F_c$  e  $F_t$  que neles se instalam. Na figura 2.3 é esquematizado a intersecção referida.

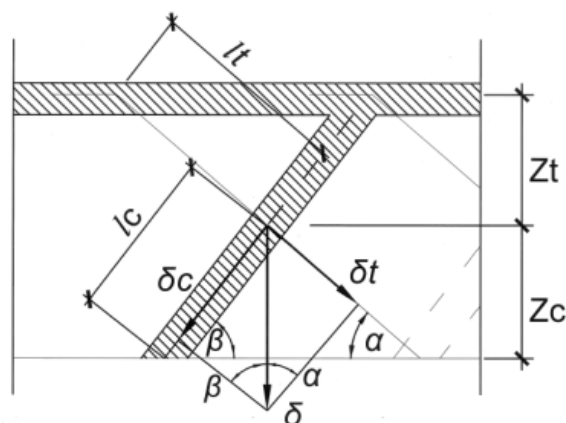


Fig.2.3 – Esquema de deformações compatíveis entre uma escora e um tirante.

De seguida é apresentado a dedução da rigidez da escora relativamente ao tirante.

$$\delta = \delta_c / \sin \beta = \delta_t / \sin \alpha \quad \sigma_c = E_c \cdot \epsilon_c$$

podemos obter  $F_c$  em função de  $F_t$

$$F_c / A_c = E_c \cdot \delta_c / l_c; \quad \delta_c = \delta_t \cdot \sin \beta / \sin \alpha$$

$$F_c = A_c \cdot E_c \cdot \delta_t / l_c \cdot \sin \beta / \sin \alpha \quad \delta_t = F_t / (A_t \cdot E_t) \cdot l_t$$

$$l_t = Z_t / \sin \alpha; \quad l_c = Z_c / \sin \beta; \quad Z_t = Z_c$$

$$F_c = A_c / A_t \cdot E_c / E_t \cdot Z_t / Z_c \cdot \sin^2 \beta / \sin^2 \alpha \cdot F_t$$

$$\text{Sendo} \quad A_c = Z (\cot \beta + \cot \alpha) \cdot \sin \beta \cdot b_0$$

$$A_t = (12 \cdot \phi_{eq})^2 / 2s \cdot Z \cdot (\cot \beta + \cot \alpha) \cdot \sin \alpha$$

(área do tirante de betão fissurado, envolvente da armadura, em 2s) (ver Anexo 4)

Em que  $\phi_{eq}$  é o diâmetro de um varão equivalente aos varões que influem o espaço 2s,

$$\phi_{eq} = \sqrt{\sum_i \phi_i^2} \quad (\text{em que os varões } \phi_i \text{ são os varões que existem em 2s})$$

e no momento anterior á fendilhação  $E_t = E_c = E_{betão}$  (ver Anexo 4)

$$F_c = \frac{\sin^3 \beta}{\sin^3 \alpha} * b_0 * 2s / (12 * \phi_{eq})^2 * F_t$$

$$\text{Fazendo } k_0 = \frac{\sin^3 \beta}{\sin^3 \alpha} * b_0 * 2s / (12 * \phi_{eq})^2$$

temos,  $F_c = k_0 * F_t$

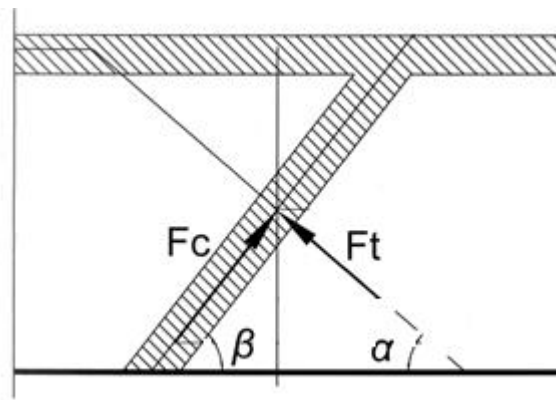


Fig.2.4 – Esquema de equilíbrio de forças na intersecção de uma escora com um tirante motivado por deformações compatíveis.

Segundo Morsch, a resistência do tirante de aço (corrigido de  $\beta$ ) é dado por:

$$F_a = A_a / 2s * \sigma_a * Z * (\cot \beta + \cot \alpha) * \sin \alpha \quad (A_a = \text{Área total dos varões que existem em } 2s)$$

Sendo  $F_a$  igual á resistência da armadura proposta e desprezando a contribuição do betão envolvente temos que  $F_a = F_t * \sin \alpha$ .

Logo a força na escora que origina uma deformação compatível com a deformação do tirante será

$$F_c = k_0 * F_a / \sin \alpha$$

## Resistência ao Esforço Transverso

---



# 3

## FATORES QUE INFLUÊNCIAM A RESISTENCIA AO ESFORÇO TRANSVERSO

### 3.1. INFLUÊNCIA DA ARMADURA LONGITUDINAL SOBRE A INCLINAÇÃO DA ESCORA JUNTO AOS APOIOS

Uma armadura que atravesse uma fenda da alma tem sempre uma influência apreciável sobre a sua resistência ao esforço transverso, qualquer que seja a sua inclinação, na medida em que, absorvendo tracções possibilita a instalação de compressão na biela formada pela fendilhação. Se a armadura é horizontal, o equilíbrio da biela exige no entanto que à armadura esteja associado um apoio vertical exterior que absorva a componente vertical da compressão nela instalada. Suponhamos então, Figura 3.1, que junto a um apoio se forma uma biela comprimida, motivada pela armadura horizontal  $A_h$ .

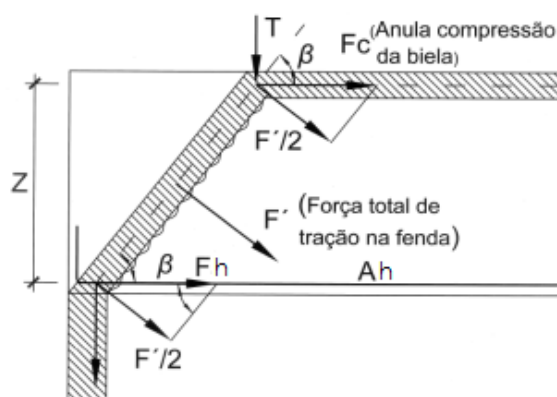


Fig.3.1 – Forças resultantes da formação da biela, junto ao apoio, pela armadura horizontal.

Como por hipótese não existe mais nenhuma armadura, as tracções sobre as fendilhações inclinadas de  $\beta$  terão de ser absorvidas pela armadura horizontal e pelo banzo comprimido. Nos apoios simples a descompressão deste banzo é total, passando a biela a constituir o seu prolongamento; num apoio contínuo a descompressão é apenas parcial.

Sendo,

$$F_h = F' / 2 * \sin \beta ; \quad \sigma = \sin^2 \beta * \tau = \cos(2\beta - 90) * \tau$$

$$\tau = T / (b_0 * h) ; \quad F' = \sigma * b_0 * h / \sin \beta$$

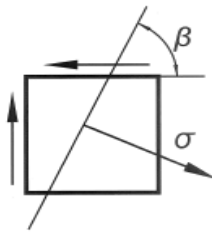


Fig.3.2 – Tensões instaladas numa faceta da escora segundo o círculo de Mohr.

fica ,

$$F' / (b_0 * h) * \sin \beta = \cos(2\beta - 90) * T / (b_0 * h)$$

$$F_h = \cos(2\beta - 90) / (2 * \sin^2 \beta) * T = T / \tan \beta$$

$$\text{se } F_h = M / h = T * h / h = T \quad \text{vem } \beta = 45^\circ ;$$

$$\text{se } F_h = 1,73 * T \quad \text{vem } \beta = 30^\circ$$

Se  $F_h = T$  temos  $\beta = 45^\circ$ , isto é, forma-se uma biela a  $45^\circ$  arrancando do apoio sem que necessite de ser atravessada por nenhuma armadura de alma, sendo equilibrada unicamente pela armadura longitudinal e pelo banzo comprimido. É claro que num apoio simples o banzo comprimido garante a absorção da outra parcela da tracção, pois nele existe precisamente uma compressão igual a  $F_h$ .



Se a armadura  $A_a$  for superior à exigida por  $M = T \cdot h$ , a biela pode para um mesmo  $T$  ficar mais inclinada assim para  $F'h = 1,73 \cdot Fh$  vem como vimos  $\beta = 30^\circ$ , o que corresponde a dizer que a resistência ao esforço transverso da viga aumentou pois o esforço a absorver é menor em  $0,73 \cdot h \cdot p$ .

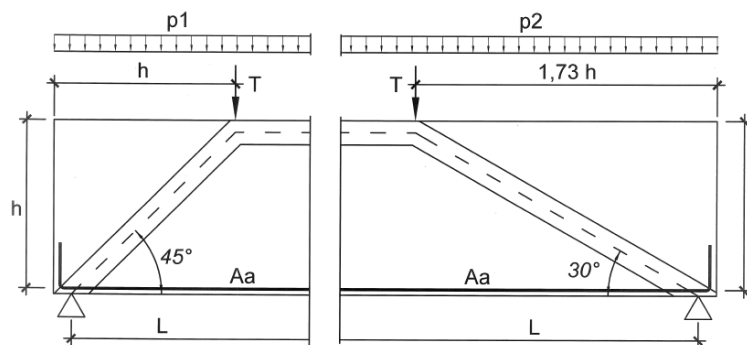


Fig.3.3 – Carga absorvida por uma biela a  $45^\circ$  e a  $30^\circ$ .

$$T = p_1 \cdot (l/2 - h)$$

$$T = p_2 \cdot (l/2 - 1,73 \cdot h)$$

$$p_2 = p_1 \cdot (l/2 - h) / (l/2 - 1,73h)$$

$$\text{Se } l = 8h; p_2 = p_1 \cdot (3h/2,27h) = 1,32 p_1$$

logo 32% de carga  $p$  de aumento.

É evidente que a inclinação da biela devido ao acréscimo da armadura, está limitada pela resistência da biela comprimida

No caso de

$$\beta = 45^\circ, \quad F_c = Fh / \cos \beta = T / \cos \beta = 1,41 T$$

$$\beta = 30^\circ, \quad F_c = Fh / \cos \beta = 1,73 T / \cos \beta = 2,0 T$$

A compressão aumentou cerca de 40% e verifica-se também uma redução da secção resistente das bielas (red. =  $\sin 30^\circ / \sin 45^\circ = 0,71$ ). Logo a tensão nas bielas aumentou quando  $\beta$  passa de  $45^\circ$  para  $30^\circ$

$$\Delta \sigma = 2,0 / 1,41 / 0,71 = 2,0$$

## Resistência ao Esforço Transverso

---

Pode dizer-se que a tensão de compressão das bielas duplicou.

Se admitirmos que, por exemplo o comprimento do apoio é 0,30m e a largura da viga 0,30m, tem-se para uma tensão de cálculo de 13 MPa, os seguintes valores máximos que se podem absorver só com armadura horizontal junto a um apoio

$$\beta = 45^\circ$$



$$A = 900 \times 0,707 = 636 \text{ cm}^2$$

$$F_c = 636 \times 130 = 826 \text{ kN}$$

$$T_{\text{máx}} = F_c / 1.41 = 586 \text{ kN}$$

$$\beta = 30^\circ$$

$$A = 900 \times 0,500 = 450 \text{ cm}^2$$

$$F_c = 450 \times 130 = 585 \text{ kN}$$

$$T_{\text{máx}} = F_c / 2.0 = 293 \text{ kN}$$

Vemos portanto que um acréscimo na percentagem de armadura horizontal aumenta a resistência ao esforço transverso, tendo como limite a resistência da biela.

Se aumentarmos

$$\mu = 1,00\% \quad (\beta = 45^\circ; \quad Fh = T)$$

$$\mu = 1,73\% \quad (\beta = 30^\circ; \quad Fh = 1,73T)$$

numa viga com  $l/h = 8$  e uma carga por metro linear  $p$ , o acréscimo da resistência ao esforço transverso vem

$$\beta = 45^\circ \quad T_{45} = p(l/2 - h/\text{tg}\beta)$$

$$\beta' = 30^\circ \quad T_{30} = p(l/2 - h/\text{tg}\beta')$$

$$\text{logo se } l = 8h$$

$$T_{45} = p * (4h - h) = 3,00 \text{ hp}$$

$$T_{30} = p * (4h - 1,73h) = 2,27 \text{ hp}$$

havendo na passagem de  $45^\circ$  para  $30^\circ$  um acréscimo correspondente à redução de  $0,73 \cdot h \cdot p$ ; ou seja,

$$T_{45} = T_{30} + (T_{45} - T_{30})$$

$$\Delta = 1 + 0,73/3,00 = 1,24$$

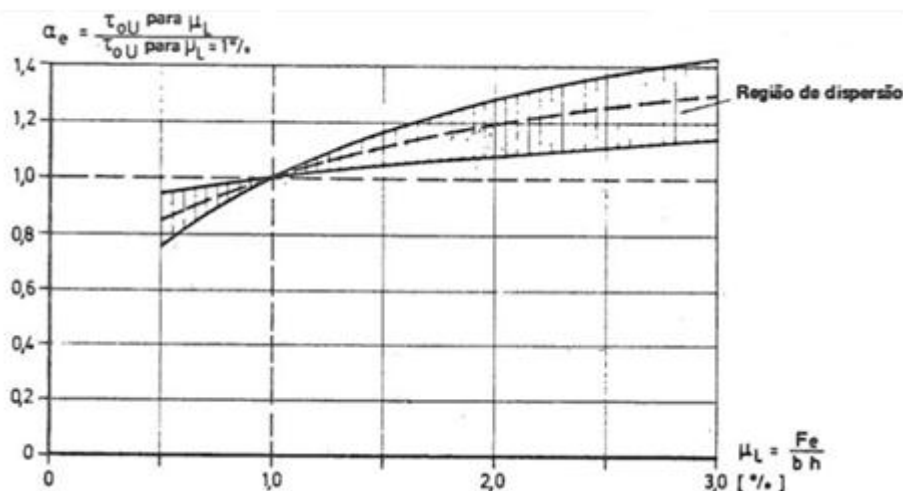


Fig.3.4 – Relação entre a percentagem de armadura com o momento reduzido (Leonhardt, 1977).

$\Delta = 1,24$  é um valor coincidente com o limite superior indicado por Leonhardt para  $\mu = 1,73\%$  (fig. 3.4).

Deve-se pensar então que o acréscimo da resistência ao corte não deve ser atribuído à influência da rigidez do banzo traccionado como Leonhardt afirmava, pois a influência do acréscimo de rigidez daquele banzo na alteração do esquema estrutural interno é insignificante e não pode justificar acréscimos tão grandes da resistência ao corte. É directamente ao acréscimo de força do tirante constituído pela armadura longitudinal de tracção e consequente maior inclinação da biela, que se deve atribuir o aumento desta resistência.

( Ver capítulo 6 – Exemplos retirados de folha de cálculo - exemplo 1 )

É ainda importante realçar-se outra influência apreciável na inclinação da biela motivada pela armadura horizontal em excesso. Referimo-nos à forma da secção, em especial às vigas T para as quais a experimentação evidenciou grande influência da relação  $b/b_0$ , fig. 3.5. Esta figura, reproduzida do livro de Leonhardt, traduz de forma clara esta influência, atribuída simplesmente à diferença de rigidez longitudinal do banzo e da biela sem explicar quaisquer aspectos desta influência; esta afirmação pressupõe portanto a existência de uma compatibilização de deformações longitudinais, para além do simples equilíbrio estático.

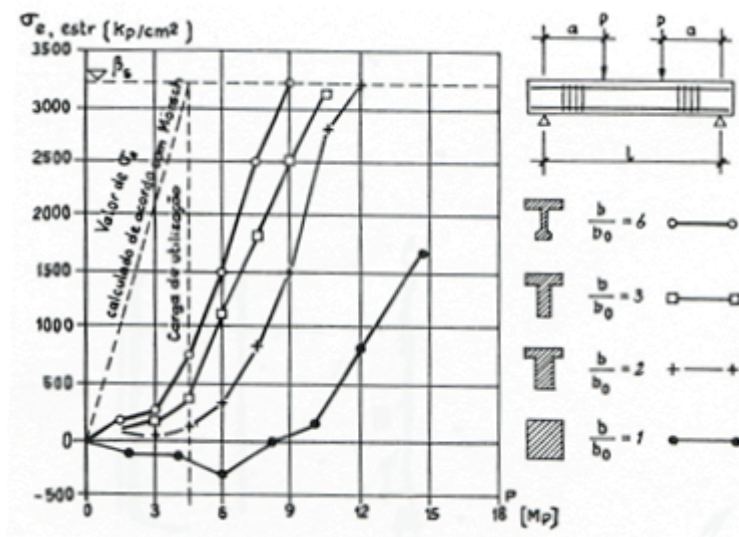


Fig.3.5 – Tensões médias nos estribos em vigas com diversas relações  $b/b_0$ .

Vai-se no entanto mostrar que a influência da forma da secção pode ser quantificada à custa apenas das relações de equilíbrio estático.

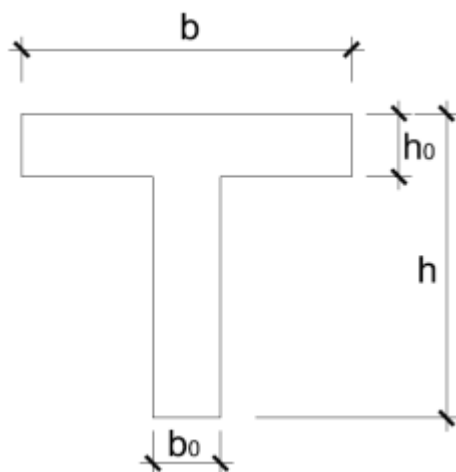


Fig.3.6 – Secção de viga em T.

Admite-se, com aproximação suficiente, que a espessura  $h_0$  do banzo corresponde à zona comprimida do betão.

No caso da fig 3.7, tem-se:

$$M = P * a ; C = P * a / Z = P / \tan \beta$$

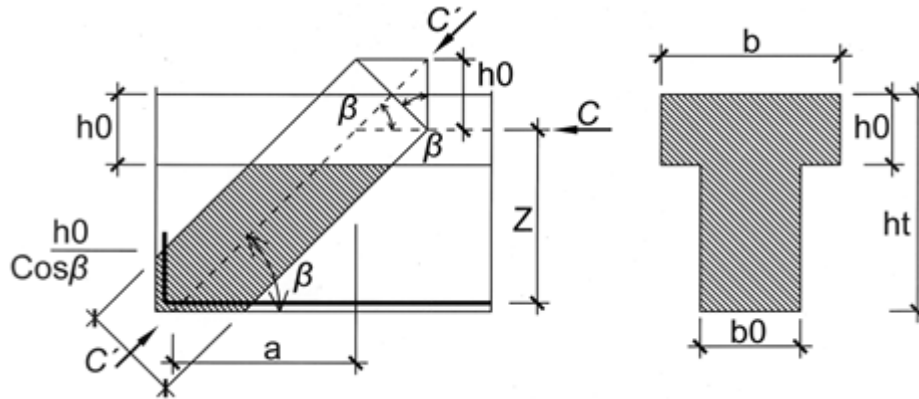


Fig.3.7 – Forças na secção de viga em T.

Sendo  $\sigma_b$  a tensão na biela, a sua compressão  $C'$  é

$$C' = \sigma_b * b_0 * h_0 / \cos \beta$$

e a respectiva componente

$$C = \sigma_b * b_0 * h_0$$

A tensão no banzo comprimido na sua ligação à biela vale

$$\sigma'_b = C / (b * h_0) = \sigma_b * b_0 / b ; C = \sigma'_b * (b * h_0) = \sigma_b * (b_0 * h_0)$$

A que corresponde na hipótese de T constante (carga concentrada), o momento

$$T * x = \sigma'_b * b * h_0 * Z \text{ ou seja:}$$

$$x = \sigma'_b * b * h_0 * Z / T$$

$$\text{O ângulo } \beta \text{ é dado por} \quad \tan \beta = Z/x = T / (\sigma_b * b * h_0) * b / b_0$$

$$\text{Se } b / b_0 = 1 \quad \tan \beta' = T / (\sigma_b * b * h_0)$$

$$\text{Substituindo} \quad \tan \beta = \tan \beta' * b / b_0$$

Isto é, entre as distâncias ao apoio  $x$  e  $x'$  correspondentes a  $\beta$  e  $\beta'$  existe a relação seguinte

$$x = x' * b_0 / b$$

Então se considerarmos duas vigas, uma com  $b/b_0=1$  e outra com  $b/b_0=3$ , e consideramos que o ângulo  $\beta$  é igual nas duas, vemos que com a mesma armadura horizontal o esforço  $T$  admissível na segunda é 1/3 do esforço  $T$  admissível na primeira. Se quisermos aumentar  $T$  teremos de usar muito mais armadura horizontal.

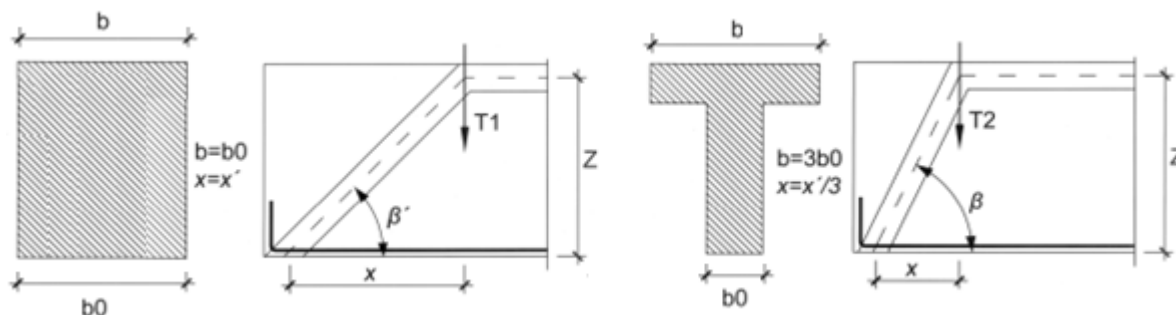


Fig.3.8 – Esquema da posição da escora com  $b/b_0=1$  (à Esq.) e  $b/b_0=3$  (à Dir.).

$$T1 = \sigma' b * b * h_0 * Z / x'$$

$$T2 = \sigma' b * b * h_0 * (3 * Z) / x'$$

$$T2 = T1 - (T1 - T2)$$

$$T2/T1 = T1/T1 - (T1 - T2)/T1 = 1 - 2/3 = 0,333$$

Vê-se na fig 3.5 (Leonhardt) que o valor da participação do betão, quando  $b/b_0 = 3$  é aproximadamente 0,40 da participação para  $b/b_0 = 1,0$ .

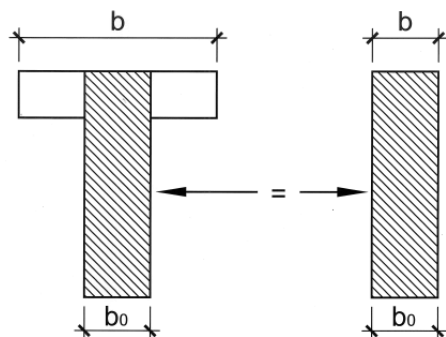


Fig.3.9 – Secção efectiva de betão resistente ao esforço transverso.

Observe-se que esta relação vale para vigas com o mesmo valor de  $b$ , isto é, se tivermos duas vigas com o mesmo valor de  $b_0$ , independentemente do valor de  $b$ , a sua resistência ao esforço transverso é idêntica.

Realça-se sobretudo a grande resistência ao esforço transverso das lajes maciças (desenvolvida apenas pela armadura longitudinal), em relação à da laje nervurada; nelas é possível a formação de arcos de curva anti-funcular das cargas, sem apelo portanto, à resistência diagonal dos esquemas de treliça.



Mas para que haja influência na resistência ao esforço transversal é preciso que o esforço transversal seja variável como no exemplo que atrás apresentamos, ou que então a carga concentrada não esteja afastada do apoio mais do que cerca de  $2h$  (ângulo  $\beta \approx 25^\circ$ ), como diz Leonhardt, sem que no entanto esta restrição se compreenda quando atribuída às diferenças de rigidez existente entre o banzo comprimido e as bielas; através da nossa análise elas são no entanto facilmente explicáveis, pois para além de um afastamento da carga concentrada superior a  $2h$ , a biela inclinada não pode atingir (exigência de forte inclinação da biela com os consequentes aumentos dos esforços nesta e no tirante) e portanto, para além da zona de influência da biela, continua a existir o mesmo esforço transversal, não havendo por isso acréscimo de resistência (uma viga nestas condições e sem armadura de esforço transversal romperia em zonas afastadas do apoio).

Interessa ainda verificar como a existência da simples armadura horizontal altera profundamente o traçado das linhas isostáticas, mesmo antes da fissuração, isto é, na designada fase I. Como se viu, a armadura longitudinal permite a formação de uma biela comprimida, com arranque a partir do apoio da viga. Conforme a inclinação desta biela, isto é, conforme a maior ou menor percentagem de armadura em excesso (em relação à exigida pelo M), e também conforme a forma de secção (em T ou rectangular) e o tipo de carga (uniforme ou concentrada), assim se pode formar um esquema estrutural identificável com um arco atirantado ou com uma viga treliça. A ligação da biela ao banzo comprimido, feita de forma mais ou menos “arredondada”, origina uma componente vertical que vale precisamente T em A ; o equilíbrio desta componente exige a formação de uma escora, de inclinação condicionada pela da 1.ª biela e por isso idêntica a  $\beta$  (se a armadura de alma não existir ou for fraca), que crie sobre o banzo inferior idêntica componente T . Isto é, entre estas duas componentes terá de existir um tirante cuja resistência depende da tensão de tracção  $f_{ctm}$  do betão. A secção deste tirante aumenta com uma menor inclinação das bielas , aumentando desse modo a resistência  $V_{Rd,c}$  da viga e diminuindo o valor de  $F_{escora}^{max}$  .

Quer dizer, devido à presença da armadura longitudinal, as isostáticas são orientadas de forma que a viga estruturalmente pode ser identificada como uma viga treliça, mesmo não existindo qualquer armadura de alma.

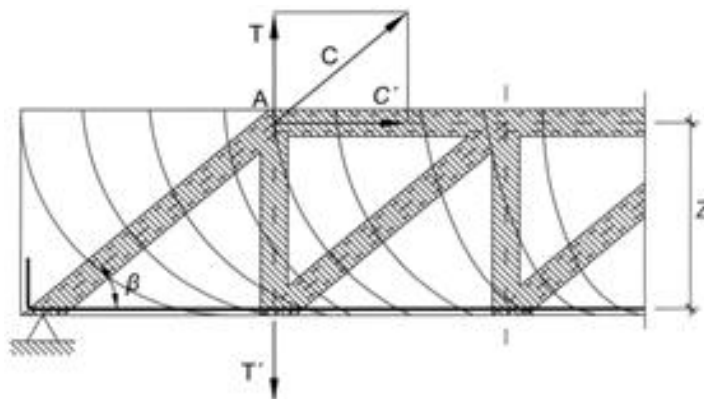


Fig.3.10 – Isostáticas de tracção e esquema de viga em treliça.

## 3.2. DEFINIÇÃO DO TIRANTE

### 3.2.1. Viga sem armadura de esforço transverso

A resistência ao esforço transverso depende da resistência do tirante de betão, ou seja, da sua secção efectiva  $b_0 \cdot z \cdot \cot \beta$  e da tensão de cálculo  $f_{ctd}$  que deverá ser corrigida por um coeficiente  $\eta$ :

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4$$

sendo estes, coeficientes que atendem às influências seguintes, respectivamente: ondulado do diagrama de tensões no tirante vertical de betão (Fig. 6); influência de  $z$  no valor deste ondulado; influência do momento negativo de continuidade (estado biaxial de tensões) no valor da tensão média  $f_{ctm}$  do tirante vertical de betão; idem, das cargas concentradas. Estes coeficientes valem:

$$\eta_1 = 0.84$$

$$\eta_2 = \left( \frac{2.4 - d}{2.2} \right)^3 \geq 0.65$$

$$\eta_2 \leq 1.00$$

$$\eta_3 = 0.8 \cdot \left( \frac{5 - \lambda}{4} \right)$$



com  $\lambda = \frac{L_{adj}}{L} \leq 1.0$  em que  $L_{adj}$  é o vão adjacente ao vão de cálculo  $L$ ; num apoio semi-encastado, representa o seu grau de encastramento podendo do lado da segurança adoptar-se definitivamente igual a 0,80.

$$\eta_4 = 1.0 - 0.05 \cdot \left( \frac{a}{d} - 1 \right)$$

sendo  $a$ , a distância ao apoio da carga concentrada.

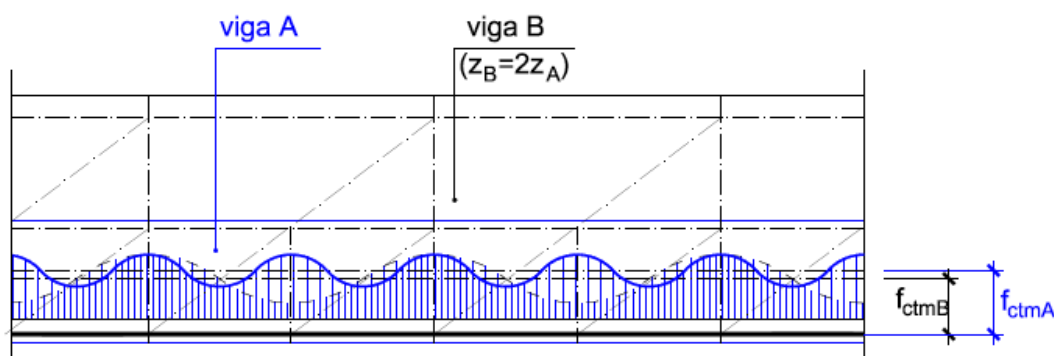


Fig.3.11 – Diagrama ondulado de tensões no tirante vertical de betão.

Os resultados experimentais mostram que o comportamento estrutural de um elemento mesmo não armado transversalmente pode ser equiparado ao de um esquema em treliça, com bielas e tirantes de betão e isto por influência directa da armadura longitudinal.

A tensão de cálculo a aplicar à secção do tirante de betão tem de corresponder ao valor médio do diagrama ondulado, fig. 3.11, com máximos localizados nas transversais dos cruzamentos das bielas com os elementos longitudinais.

Aquela figura mostra também que o aumento da malha da treliça, resultante do aumento de  $z$ , acentua o ondulado do diagrama e faz por isso variar o valor médio fixado para  $d = 0,20$  m; esta variação é representada pelo coeficiente  $\eta_2$ , definido a partir de resultados experimentais, fig. 3.12.

O Code-Modelo do CEB-FIP\* considera os efeitos simultâneos de  $\eta_1$  e  $\eta_2$  através do valor de  $0,60 \cdot (1,6 - d)$ , para  $p_l = 0,8\%$ ; separando aqueles dois efeitos pode dizer-se que para  $d=0,20$  m é  $\eta_1 = 0,84$ . Quanto ao coeficiente  $\eta_2$ , o valor acima proposto traduz com

suficiente aproximação os resultados experimentais da fig.3.12, em que é  $\eta_2 = 1$ , para  $d = 0,20m$ .

Nos apoios contínuos ou semi-encastados, o momento de flexão respectivo origina tensões longitudinais de tracção e compressão que submetem os tirantes transversais de betão a um estado biaxial de tensão, o que não sucede nos apoios simples. Experimentalmente comprovou-se que este estado biaxial origina uma quebra de cerca de 20% num apoio contínuo de tramos adjacentes iguais e simetricamente solicitados. O coeficiente  $\eta_3$  introduz de forma suficientemente aproximada a influência do momento no apoio de uma viga, fazendo-o depender da relação entre os vãos ou do grau de semi-encastramento efectivo ( $\lambda = 1$  para o encastramento perfeito).

Quanto ao coeficiente  $\eta_4$ , relativo apenas a cargas concentradas, ele deve-se ao facto de estas cargas originarem esforço transversal constante desde o apoio até à sua secção de aplicação, com o consequente aparecimento de um estado biaxial de tensões originado pelo momento de flexão; ele foi definido a partir de resultados experimentais.

Em relação à fig.3.11, ela traduz como se disse a influência de  $z$  sobre o valor de  $f_{ctwd}$ , em elementos não armados; no entanto esta influência tem sido até agora atribuída à acção do engrenamento dos inertes, «aggregate interlock», e também à do recobrimento  $c$ .

Julga-se porém que se trata de uma interpretação errada, pois a redução de  $f_{ctd}$  não existe em elementos armados, mesmo com a percentagem mínima, apesar de nestes elementos a fissuração ser maior o que logicamente faria aumentar o efeito do «aggregate interlock». Pensa-se que aqueles efeitos favoráveis resultam de que em betões de inertes maiores a sua resistência aumenta (e portanto também a dos tirantes verticais) e por outro lado o aumento de  $c$  (proporcional a  $d$ ) diminui a variação de  $z$  com  $d$ .

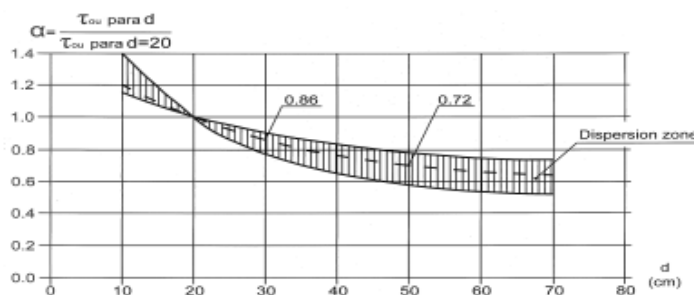


Fig.3.12 – Variação de  $\frac{V_{Rd,c}}{b_w d}$  com  $d$ .

### 3.2.2. Viga com armadura de esforço transverso

A deformação dos tirantes de aço pressupõe a fissuração do betão envolvente, sempre que a tensão daquele ultrapassa o valor exigido pela homogeneização da secção. Ora os resultados experimentais obtidos mostram que no betão com armadura de esforço transverso devem coexistir em paralelo com esta armadura tirantes de betão não armado (não fissurado), o que só é possível com a separação estrutural entre eles. A Fig. 3.13 esquematiza esta separação; as fissuras do betão envolvente dos varões terminam quando o alongamento unitário do betão é o correspondente à tensão  $f_{ctm}$ .

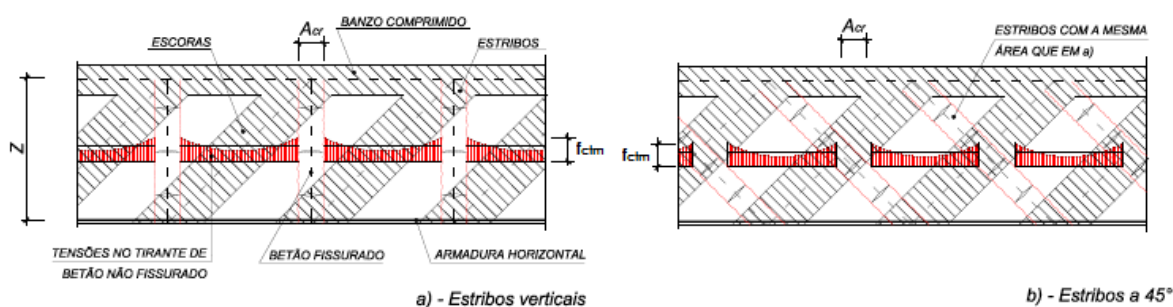


Fig.3.13 – Diagramas de tensão nos tirantes de betão.

A presença de armaduras implica a fissuração do betão que as envolve, logo à área do tirante vertical de betão deve ser descontada a área onde a tensão instalada é superior a  $f_{ctm}$ , pelo facto de não possuir resistência à tracção. Nesta zona apenas irá resistir o tirante de aço dado pelos estribos.

A secção efectiva do tirante de betão  $b_0 \cdot z \cdot \cot \beta$  deverá ser neste caso reduzida da área

fissurada envolvente das armaduras  $\frac{A_{cr} + \Delta A_{cr}}{2 \cdot s}$ . Também os coeficientes  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são agora

iguais a 1. A armadura transversal origina a fissuração do betão que a envolve e por isso a secção resistente do tirante do betão diminui, tanto mais quanto maior for a percentagem daquela armadura. Nos elementos armados transversalmente o diagrama das tensões de tracção nos tirantes de betão é praticamente plano, como se vê na Fig. 3.14 e os ensaios experimentais confirmam, isto sobretudo porque o seu ondulado não depende do braço resistente  $z$  da viga

treliça, como nos elementos não armados transversalmente sucede, mas sim do afastamento entre varões.

Por tudo isto se tem, para os elementos armados transversalmente,  $\eta_1 = \eta_2 = 1.0$ , desde que se respeitem os afastamentos máximos s impostos nos regulamentos.

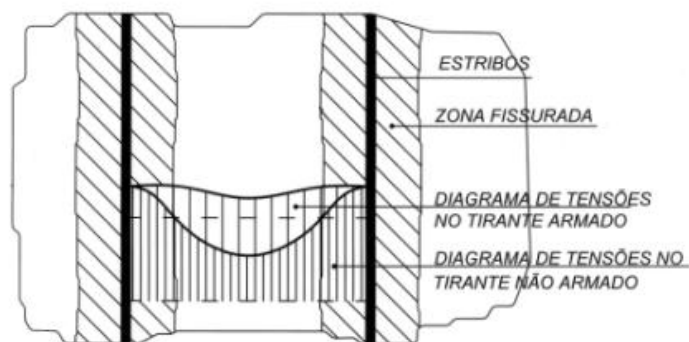


Fig.3.14 – Diagramas de tensão nos tirantes de betão armado e não armado.

$$(\eta_I \eta_{II} f_{ctk} = 0,84 \times 0,86 \times 1,80 = 1,32 \text{ MPa} = f_{ctwk})$$

### 3.3. RESISTÊNCIA ÚLTIMA AO ESFORÇO TRANSVERSO DE VIGAS SEM ARMADURA DE ALMA

Da análise efectuada em 3.1 nasce logicamente uma limitação à capacidade de resistência ao esforço transversal de vigas sem armadura de alma que passa pela resistência do tirante:

$$VR_{d,c,max} = b_0 * Z / \tan \beta * \eta * f_{ctd}$$

e pela resistência da biela

$$F_{escora}^{max} = \sigma_b * b_0 * b_{ap} * \sin \beta$$

$$\text{Admitindo-se que } b_{ap} = 0,60 * z \quad \text{e} \quad \sigma_b = 0,80 * f_{cd}$$

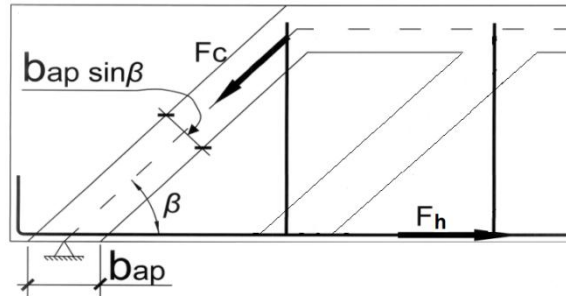


Fig.3.15 – Largura da secção da escora.

Pode dizer-se que normalmente é a resistência à tracção do betão que limita a resistência ao esforço transversal que a armadura longitudinal desenvolve. A limitação imposta pela resistência à compressão da escora de betão depende como veremos das tensões  $f_{cd}$  e  $f_{syd}$  do betão e do aço e dos ângulos do tirante e da escora  $\alpha$  e  $\beta$ .

(ver ANEXO 5)

## Resistência ao Esforço Transverso

---



# 4

## RESISTÊNCIA AO ESFORÇO TRANSVERSO DE VIGAS DE BETÃO ARMADO

A resistência ao esforço transverso depende, em estado limite, directamente da resistência da armadura transversal e da resistência do betão quer à compressão (nas escoras comprimidas) quer sobretudo à tracção. Depende ainda da inclinação  $\beta$  das escoras dada por:

$$\tan\beta = \frac{T}{F_h}$$

em que  $F_h$  é a força exercida pela armadura longitudinal, isto é, a força resultante da armadura em excesso relativamente ao momento flector e deverá ser no mínimo igual a  $T$ .

### 4.1. RESISTÊNCIA AO ESFORÇO TRANSVERSO DE VIGAS SEM ARMADURA DE ESFORÇO TRANSVERSO

A resistência ao esforço transverso depende da resistência do tirante de betão, ou seja, da sua secção efectiva  $b_0 \cdot z \cdot \cot\beta$  e da tensão de cálculo  $f_{ctd}$ :

$$V_{Ed} < V_{Rd} = V_{Rd,c} = b_0 \cdot z \cdot \cot\beta \cdot \eta \cdot f_{ctd} \leq F_{escora}^{max} \cdot \sin\beta$$

Nesta expressão  $f_{ctd}$  é a tensão de cálculo à tracção do betão,  $\beta$  é o ângulo da escora de betão com a horizontal e  $\eta$  é dado por:

$$\eta_1 = 0.84$$

$$\eta_2 = \begin{cases} \left( \frac{2.4 - d}{2.2} \right)^3 \geq 0.65 \\ \leq 1.00 \end{cases}$$

$$\eta_3 = 0.8 \cdot \left( \frac{5 - \lambda}{4} \right)$$

com  $\lambda = \frac{L_{adj}}{L} \leq 1.0$  em que  $L_{adj}$  é o vão adjacente ao vão de cálculo  $L$ ; num apoio semi-encastado, representa o seu grau de encastramento podendo do lado da segurança adoptar-se definitivamente igual a 0,80.

$$\eta_4 = 1.0 - 0.05 \cdot \left( \frac{a}{d} - 1 \right)$$

sendo  $a$ , a distância ao apoio da carga concentrada.

Se  $V_{Rd,c} > V_{Ed}$  a viga não precisa de armadura de esforço transverso, devendo no entanto ser armada com armadura mínima, de modo a evitar fendilhação excessiva nomeadamente de retracção. No caso de  $V_{Rd,c} < V_{Ed}$  então temos de reforçar a viga com armadura transversal.

#### 4.2. RESISTÊNCIA AO ESFORÇO TRANSVERSO DE VIGAS COM ARMADURA DE ESFORÇO TRANSVERSO

A resistência resultante da armadura da alma ( $A_a/2 \cdot s$ , área de armadura por metro linear), calculada de acordo com a Teoria de Mörsch, ajustando à inclinação  $\beta$  da biela, forçada pela armadura longitudinal é:

$$V_{Rd,s} = z \cdot \frac{A_a}{2s} \cdot \sigma_a \cdot (\cot \beta + \cot \alpha) \cdot \sin \alpha$$

A resistência resultante da contribuição do betão à tracção,  $V_{Rd,c}$ , resulta do tirante de betão cuja secção varia com a inclinação da biela e com a percentagem de armadura de esforço transverso (alteração da área fissurada), esta parcela é dada por:

$$V_{Rd,c} = (b_0 \cdot z / \tan \beta - (A_{cr} + \Delta A_{cr}) / 2s \cdot z / \tan \beta) \cdot \eta \cdot f_{ctd}$$

$$A_{cr} = A_a \cdot \frac{f_{syd}}{f_{ctm}}$$

em que  $A_{cr}$  é a área fissurada do tirante no espaço  $2s$ , e  $\Delta A_{cr}$  é o acréscimo de área fissurada devido ao recobrimento  $c$ .





A verificação da segurança é feita a partir de:

$$V_{Ed} < V_{Rd} = V_{Rd,c} + V_{Rd,s} < F_{escora}^{max} \sin \beta$$

**Nota:** Viu-se em 2.2 que

$$F_c = \sin^3 \beta / \sin^3 \alpha * b_0 * 2s / (12 * \phi_{eq})^2 * F_t = k_0 * F_t$$

Sendo  $F_t$  igual á resistência do tirante de aço com betão colaborante envolvente. Desprezando a contribuição do betão envolvente  $F_t = F_a / \sin \alpha$ , logo a força na escora que origina uma deformação compatível com a deformação do tirante será  $F_c = k_0 * F_a / \sin \alpha$ .

Pela compatibilidade de deformações se  $F_c = k_0 \cdot \frac{F_a}{\sin \alpha}$  for superior a  $F_{escora}^{max}$ , isto é, se só a armadura esgota a resistencia da escora de betão, então deveremos adotar para  $F_a$  um valor inferior

$$F_{acorrigido} = \frac{F_{escora}^{max}}{F_c} \cdot F_a.$$

Se  $F_c$  for inferior a  $F_{escora}^{max}$ , então temos a possibilidade de considerar a contribuição do betão como tirante a somar a  $F_a$ , ou de aumentar a quantidade da armadura. No caso de considerarmos a contribuição do tirante de betão  $F_b = (F_{escora}^{max} - F_c) \cdot \sin \beta$  temos de ter em atenção que ela não deverá ultrapassar o valor dado por

$$V_{Rd,c} = (b_0 * Z / \tan \beta - (A_{cr} + \Delta A_{cr}) / 2s * Z / \tan \beta) * \eta * f_{ctd}$$



## Resistência ao Esforço Transverso

## Folha de cálculo

l	p	MSd	b	d			Aa	Fa	
8,00	80	960	0,30	1,14			21,5	936	meio vão
arm longitudinal nec apoio							13,1	570	apoio
betão B	fsyd	ht	b0	b	$\alpha$	l		betão B	25
25	435000	1,20	0,30	0,30	90	8,00		fctm	22
d	z	s	2s	$\beta$	diam estr	n est em 2s		fctd	11
1,14	1,03	0,61	1,22	40	0,8	9,7		fcd	133
$\phi$ equiv	s, b0>15 d	afest	num est/m	Aa/2s	At (em 2s) =	Acr (em 2s) =		$\tau_2$	40
3,53	sim	0,125	8	0,0008	0,1795	0,212		$\tau_1$	6,5
cotan $\alpha$	cotan $\beta$	recob	arco	r	$\Delta$ Acr	%Acr		0,8*fcd	106
0,000	1,187	3,0	0,9	0,06	0,018	58%		fck	200
inf.arm.long.	T*max45	480	Fa min	480	Vcdmax(não/armado)=	161	precisa de armadura		
p	l	b	Fa	$\tau_2$	0,8*fcd				VRd max
80	8,00	0,30	570	40	106				1266
tan $\beta$	$\beta$	bap	$\tau_1$	$\tau_1/\tan \beta$	Vcd	Vwd	VRd2<=VRd	VSd	
0,84	40	0,62	6,50	7,72	161	426	538	480	
l	p	Ah apoio	ht	b0	b	num est/m	diam estr	betão B	fsyd
8,00	80	13,1	1,20	0,30	0,30	8	8	25	435000
		61%	%da Ah vão		VED		MEd	%Acr	$\alpha$
					480		960	58%	90
comp deform		Vesc,max	VRd,s	VRd,c	VRd	%REBAP			$\beta$
		1266	426	112	538	0,92			40
EC2		1139	533	0	533	0,92	Ah apoio	%da Ah vão	34
MC10		1098	450	120	570	0,98	13,1	61%	39
REBAP		1365	359	222	582	1,00			45
compat. de deformações	k0	0,54	Fa corrig.	426	Vcd max	Fesc max	Vwd	Vcd	VRd
	Ft	Fc=Ft*k0	Fa=Ft*sen $\alpha$	Fesc max-Fc					
	426	232	426	1035	112	1266	426	112	538
EUROCODE	CRdc	k	rl	nmin	v	VRdmax	VRdc	Ved	VRds
	0,12	1,42	0,0038	90	0,55	1139	115	1256	533
REBAPE	REBAPE					VRdmax	Vwd	Vcd	VRd
	$\alpha = 90$					1365	359	222	582
MC10				$\theta$		VRd,max	VRd,s	VRd,c	VRd
nível 1				36		973	494	137	632
nível 3				39		1098	450	120	570

### VRd

Modelo	VRd
comp deform	538
EC2	533
MC10	570
REBAP	582

### VRd,s + VRd,c

Modelo	VRd,s	VRd,c
comp deform	426	112
EC2	533	0
MC10	450	120
REBAP	359	222

a (carg concs)	armado	n/armado	espaço para preenchimento de dados							
$\eta$	1,03	0,44								
fctwd=0,85/1,5. $\eta$ .fctk	0,80	0,44								
	7,28	3,97								
Betão B	20	25	30	35	40	45	50	55		
fctm	19,00	22,00	25,00	28,00	31,00	34,00	37,00	40,00		
fctd	9,30	10,70	12,00	13,30	14,70	16,00	17,30	18,70		
fcd	107	133	167	200	233	267	300	333		
$\tau_2$	32	40	50	60	70	80	90	100		
$\tau_1$	6,00	6,50	7,50	8,50	9,00	10,00	11,00	11,50		
0,8*fcd	86	106	134	160	186	214	240	266		
fck	161	200	251	300	350	401	450	500		



## 5

## EXEMPLOS RETIRADOS DA FOLHA DE CÁLCULO

- 1) - Viga com 0,40 x 0,90 m , 8 estr. 8 por metro (verticais) ,  $\beta=39^\circ$  e  $\alpha=90^\circ$   
(Ver capítulo 2.2 exemplo 1 )

l	p	Ah apoio	ht	b0	b	num est/m	diam estr	betão B	fsyd
8,00	80	13,8	0,90	0,40	0,40	8	8	25	435000
		48%	%da Ah vão		VEd		MEd	%Acr	$\alpha$
					480		960	43%	90
		Vesc,max	VRd,s	VRd,c	VRd	%REBAP			$\beta$
comp deform		1228	336	158	494	1,01			39
EC2		1139	399	0	399	0,81	Ah apoio	%da Ah vão	34
MC10		1094	342	124	466	0,95	13,8	48%	38
REBAP		1365	269	222	492	1,00			45

$A_{cr}/(b_0 \cdot 2s) \approx 39\%$  logo a área do tirante de betão 61% de  $b_0 \cdot 2s$

Arm. Long  $\approx 48\%$  da Arm.vão

O aumento da armadura horizontal reduziu o ângulo  $\beta$  , aumentando  $V_{Rd}$ .

- 2) - Viga com  $h=0,90$  m,  $b_0=0,20$  m,  $b=0,20$  m, 8 estr. 8 por metro (verticais)

2.1 Exemplo idêntico ao do capítulo 2.2 exemplo2 , com redução do ângulo  $\beta$  para  $36^\circ$  e  $\alpha=90^\circ$

l	p	Ah apoio	ht	b0	b	num est/m	diam estr	betão B	fsyd
8,00	30	5,7	0,90	0,20	0,20	8	8	25	435000
		53%	%da Ah vão		VEd		MEd	%Acr	$\alpha$
					180		360	87%	90
		Vesc,max	VRd,s	VRd,c	VRd	%REBAP			$\beta$
comp deform		574	374	20	394	1,04			36
EC2		542	448	0	448	1,18	Ah apoio	%da Ah vão	31
MC10		544	351	65	416	1,09	5,7	53%	37
REBAP		682	269	111	381	1,00			45

$A_{cr}/(b_0 \cdot 2s) = 87\%$  logo a área do tirante de betão 13% de  $(b_0 \cdot 2s)$ , diminui

A armadura no apoio 53% da necessária para o momento máximo no meio vão

Para se manter  $V_{Rd}$  teve de se diminuir  $p$  a mais de metade.

2.2 Exemplo idêntico ao do capítulo 2.2 exemplo3 , com  $\beta=36^\circ$  e  $\alpha=45^\circ$

l	p	Ah apoio	ht	b0	b	num est/m	diam estr	betão B	fsyd
8,00	30	5,7	0,90	0,20	0,20	8	8	25	435000
		53%	%da Ah vão		VEd		MEd	%Acr	$\alpha$
					180		360	87%	45
		Vesc,max	VRd,s	VRd,c	VRd	%REBAP			$\beta$
comp deform		574	455	20	475	0,97			36
EC2		868	448	0	448	0,91	Ah apoio	%da Ah vão	31
MC10		960	439	65	504	1,02	5,7	53%	37
REBAP		682	381	111	492	1,00			45

Aumentou  $V_{Rd,s}$ .

## Resistência ao Esforço Transverso

### 2.3 Exemplo idêntico ao anterior, com $b_0=0,20\text{m}$ e $b=0,40\text{m}$ , $\beta=36^\circ$ e $\alpha=45^\circ$

l	p	Ah apoio	ht	b <sub>0</sub>	b	num est/m	diam estr	betão B	fsyd
8,00	30	5,7	0,90	0,20	0,40	8	8	25	435000
		53%	%da Ah vão			VEd	MEd	%Acr	$\alpha$
						180	360	87%	90
		Vesc,max	VRd,s	VRd,c	VRd	%REBAP			$\beta$
comp deform		574	374	20	394	1,04			36
EC2		542	448	0	448	1,18	Ah apoio	%da Ah vão	31
MC10		544	351	65	416	1,09	5,7	53%	37
REBAP		682	269	111	381	1,00			45

### 3) - Viga com 0,30 x 1,20 m, 8 estr. 8 por metro (verticais) , $\beta=39^\circ$

l	p	Ah apoio	ht	b <sub>0</sub>	b	num est/m	diam estr	betão B	fsyd
8,00	30	5,1	1,20	0,30	0,30	8	8	25	435000
		63%	%da Ah vão			VEd	MEd	%Acr	$\alpha$
						180	360	58%	90
		Vesc,max	VRd,s	VRd,c	VRd	%REBAP			$\beta$
comp deform		1245	438	115	553	0,95			39
EC2		1104	575	0	575	0,99	Ah apoio	%da Ah vão	32
MC10		1096	453	121	574	0,99	5,1	63%	38
REBAP		1365	359	222	582	1,00			45

### 4) - Viga com banzo igual a 1.00 m e ht igual a 0,25 m ( tipo laje )

l	p	Ah apoio	ht	b <sub>0</sub>	b	num est/m	diam estr	betão B	fsyd
5,00	20	1,7	0,25	1,00	1,00	8	8	25	435000
		17%	%da Ah vão			VEd	MEd	%Acr	$\alpha$
						75	94	17%	90
		Vesc,max	VRd,s	VRd,c	VRd	%REBAP			$\beta$
comp deform		965	75	128	203	0,89			45
EC2		791	111	0	111	0,48	Ah apoio	%da Ah vão	34
MC10		772	88	74	161	0,70	1,7	17%	40
REBAP		948	75	154	229	1,00			45

l	p	Ah apoio	ht	b <sub>0</sub>	b	num est/m	diam estr	betão B	fsyd
5,00	20	2,2	0,25	1,00	1,00	8	8	25	435000
		22%	%da Ah vão			VEd	MEd	%Acr	$\alpha$
						75	94	17%	90
		Vesc,max	VRd,s	VRd,c	VRd	%REBAP			$\beta$
comp deform		846	95	163	257	1,12			38
EC2		753	125	0	125	0,54	Ah apoio	%da Ah vão	31
MC10		760	95	85	180	0,78	2,2	22%	38
REBAP		948	75	154	229	1,00			45

Com um pequeno aumento da armadura longitudinal no apoio aumentou-se  $V_{Rd}$  de um valor inferior ao REBAPE para um valor superior ( $\beta$  passou de  $45^\circ$  para  $38^\circ$ ).

Verifica-se que nas lajes de betão com muito menos de metade da armadura longitudinal máxima do vão, nos apoios, que a resistência do tirante de betão não armado é enorme quando comparada com as cargas habituais de calculo.

# 6

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1. TIRANTES DE BETÃO

Ao longo deste estudo verificamos que tanto a compatibilização das deformações entre as escoras de betão e os tirantes armados, bem como as bielas de compressão originadas pela armadura longitudinal horizontal de tracção junto aos apoios, implicam a existência de tirantes de betão independentemente de existir, ou não, armadura de esforço transverso.

Podemos dizer que existe um modelo único de treliça com escoras de betão e tirantes, em que:

- a inclinação das escoras depende da quantidade de armadura horizontal, da existência de compressões ou tracções, da existência de cargas concentradas;
- os tirantes podem ser subdivididos em dois tipos de tirante, sendo um constituído por armaduras envolvidas em betão fissurado fazendo um ângulo com a horizontal  $\alpha$  variável, e o outro constituindo por todo o restante betão não fissurado.

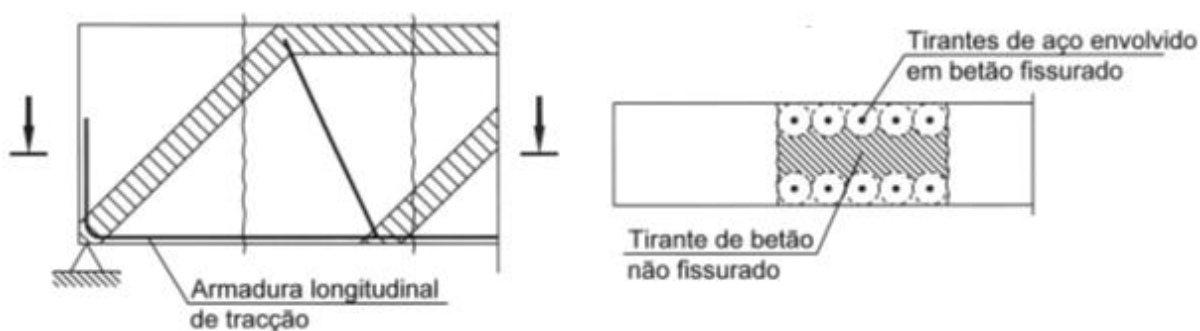


Fig.6.1 – Área de tirante de betão.

A secção  $b_0 * Z / \tan \beta - A_{cr} * Z / \tan \beta / 2s$  destes tirantes de betão é dependente de vários factores como sejam a qualidade do betão, a quantidade e o diâmetro dos varões, o recobrimento dos varões, a espessura da alma, a inclinação das bielas.



## 6.2. ARMADURA LONGITUDINAL DE TRACÇÃO

A armadura longitudinal será dimensionada para resistir a  $M$  ao longo do vão, sendo que junto aos apoios simples deverá no mínimo garantir que  $F_h$  seja igual a  $T$  quando  $a = z$ .

$$M = T * a = F_h * z.$$

Tendo neste caso a biela de compressão uma inclinação  $\beta = 45^\circ$ .

Se  $F_h$  for superior ao valor anterior, a inclinação  $\beta$  da biela diminuirá aumentando o valor de  $V_{Rd,c}$  e de  $V_{Rd,s}$ .

Note-se que o valor de  $\beta$  só depende de  $T$ ,  $b$ ,  $b_0$ ,  $F_h$  tendo  $F_h$  um valor mínimo para

$$F_{h_{\min}} = T / \tan 45^\circ = (p * (l/2)) / \tan 45^\circ$$

Note-se ainda que nos apoios contínuos a inclinação das bielas também se relaciona com o excesso de  $F_h$  em relação ao requerido pelo momento de continuidade.

## 6.3. VALOR MÁXIMO DE $V_{RD}$

$V_{Rd}$  é o resultado da soma das resistências dos dois tirantes (armadura e betão não fissurado) e o seu valor máximo é limitado quer pela tracção admissível dos tirantes de betão quer pelo esmagamento das escoras, com valores da tensão de cálculo definida pelos regulamentos.



## BIBLIOGRAFIA

- Araújo Sobreira J.,(1980). *Resistência ao Corte do Betão Armado*, Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, pp. 17-28.
- Bentz, E. (2010). *MC2010: Shear Strength of beams and implications of the new approaches*. Shear and punching shear in RC and FRC elements, Outubro, Itália, pp.1-13, FIB, Salò.
- Bentz, E., Vecchio, F., Collins, M. (2006). *Simplified Modified Compression Field Theory for Calculating Shear Strength of Reinforced Concrete Elements*. ACI Structural Journal, Julho-Agosto, pp.614-624.
- Leonhardt F., Mönnig E.,(1977). *Construções de Concreto- Volume 1* Livraria Interciência, Rio de Janeiro.
- Ribeirinho Soares, J. (2011). *Verificação da Segurança ao Corte de Elementos de Betão Armado- Estudo e Comparação da Aplicação de Diferentes Regulamentos*, Mestrado Integrado em Engenharia Civil - 2010/2011 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2011.
- EN 1992-1-1: 2004, "Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings".
- Federation International du Beton – FIB (2010). *Model Code 2010: First Complete Draft – volume 2*, Bulletin no 56.
- Federation International du Beton - FIB, *Model Code 2010: First Complete Draft – volume 2*, Bulletin no 56, Abril de 2010.
- REBAP: Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado, Lopes da Silva Editora, Porto, 1984.
- RSA: Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes, Porto Editora, Porto, 1984.



**GOP** Gabinete de Organização e Projectos, Lda

## Resistência ao Esforço Transverso

---





## **ANEXOS**

### **A.1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

1. Considerações sobre Rotura por Esforço Transverso (Elementos do livro “Construções de Betão” de Leonhardt)
  - 1.1. Rotura por Corte – Tracção
  - 1.2. Rotura por Compressão das Bielas
  - 1.3. Influência do Tipo de Carga sobre a Capacidade Resistente ao Esforço Transverso
2. Analogia Clássica de Morsch
3. EC2 e o Modelo De Escoras e Tirantes
4. O Model Code de 2010 e o MCFT

### **A.2. ESFORÇO TRANSVERSO COM COMPRESSÃO**

### **A.3. EFEITO DOS RECOBRIMENTOS DAS ARMADURAS**

### **A.4. DEDUÇÃO DOS VALORES DE $E_t$ E DE $A_t$ A ADOTAR**

### **A.5. DEDUÇÃO DOS FATORES QUE INFLUENCIAM A RESISTENCIA DAS ESCORAS DE BETÃO**





# **ANEXO 1**

## **REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **1. CONSIDERAÇÕES SOBRE ROTURA POR ESFORÇO TRANSVERSO (ELEMENTOS DO LIVRO "CONSTRUÇÕES DE BETÃO" DE LEONHARDT)**

#### **1.1. ROTURA POR CORTE – TRACÇÃO**

No caso de ser conferida à armadura da alma a acção principal na resistência ao corte e, em simultâneo, existir a possibilidade de fissuração do banzo traccionado (redução de armadura longitudinal, ou simultaneidade de M e V elevados), a rotura pode dar-se de diferentes formas consoante a largura da alma, segundo os resultados experimentais.

Em almas com espessuras correntes, a partir das fissuras de tracção por flexão, formam-se fissuras inclinadas mas agora a armadura da alma não permite a concentração da fendilhação numa única fenda, originando-se por isso muitas bielas de compressão, segundo o esquema da Teoria de Mörsch. A rotura resultará quando o limite de escoamento da armadura for atingido, da abertura das fendas e consequente penetração no banzo comprimido, com rotura do mesmo, se entretanto as armaduras não romperem.

Em vigas de alma delgada, em zonas de M reduzido, ou então em zonas descomprimidas de vigas pré-esforçadas, em que não existe fissuração de flexão, a alma pode fendilhar pela acção directa da tensão principal de tracção originada por um esforço transverso forte (junto a um apoio). A existência de uma armadura longitudinal fraca pode provocar o rompimento do banzo traccionado, após esgotamentos da armadura da alma.

#### **1.2. ROTURA POR COMPRESSÃO DAS BIELAS**

Em vigas I, com banzos reforçados, e em zonas onde a fissuração por flexão não se pode desenvolver, se a armadura da alma é muito robusta pode ocorrer a rotura brusca das bielas comprimidas antes do escoamento da armadura de alma.

Este tipo de rotura corresponde ao limite superior da resistência ao corte que é limitada pelos valores de  $\tau$  fixados no REBAP. No Eurocódigo este limite é influenciado pelo ângulo de inclinação das escoras e pela resistência à compressão do betão.

#### **1.3. INFLUÊNCIA DO TIPO DE CARGA SOBRE A CAPACIDADE RESISTENTE AO ESFORÇO TRANSVERSO**

O tipo de carga influi de forma indirecta sobre a resistência ao corte de uma viga. Numa distribuição uniforme de carga, originando um diagrama de esforço transversal decrescente em sentido oposto ao dos momentos, diminui a influência da fendilhação de flexão sobre a fissuração da alma. As cargas concentradas originam um esforço transversal constante o que pode conduzir a zonas em que  $T$  e  $M$  são elevados, nomeadamente quando elas se afastam dos apoios. Este facto foi comprovado experimentalmente onde foram medidos acréscimos apreciáveis da resistência ao corte em vigas, quando solicitado por carga uniforme, em relação à que possuem para cargas concentradas longe dos apoios.

Aliás a influência do tipo de carga está igualmente associada à esbelteza da viga (relação  $l/h$ ) ou ao afastamento da carga concentrada ao apoio ( $a/h$ ). Ambas estas influências estão relacionadas com a acção da armadura longitudinal junto aos apoios e o efeito de arco que lhe está associado.

## **2. ANALOGIA CLÁSSICA DE MORSCH**

Como se sabe, esta analogia reduz uma viga de betão em estado limite último (fase II) a um modelo de viga rotulada (treliça), formada por dois banzos ligados por bielas comprimidas e tirantes. Assim, a resistência da viga ao esforço transversal é definida à custa dos esforços de compressão e tracção instalados naqueles elementos.

A analogia clássica de Mörsch baseia-se nos três pressupostos seguintes: banzos paralelos; diagonais comprimidas a  $45^\circ$ ; diagonais de tracção inclinadas de  $\alpha$  em relação à horizontal; além disto exige-se ainda que o modelo de treliça corresponda a uma solução hiperstática de forma a se impossibilitar o aparecimento de fissuras inclinadas não interceptadas por armadura de alma.

A hiperstaticidade é ignorada e a resistência é definida à custa apenas de equilíbrios estáticos, com desprezo dos esforços secundários de flexão e da compatibilização de deformações axiais dos elementos de treliça; assim admite-se que a resistência da viga é idêntica à do conjunto de vigas simples em que idealmente se pode decompor a treliça real.

Numa treliça simples isostática, a tracção instalada na direcção do ângulo  $\alpha$  com a horizontal é dada por  $F_t = T/(\sin \alpha)$ , sendo  $T$  o esforço transversal relativo ao intervalo  $at$

da malha;  $Ft$  é a tracção total instalada na alma da viga, no intervalo correspondente à malha, qualquer que seja o número de elementos (estribos ou varões inclinados) que nesta malha existam, armadura esta que é definida pela secção por unidade de comprimento  $A't = At / at$  em que  $At$  é a secção de um dos elementos e  $at$  é o afastamento constante entre eles, medido na horizontal.

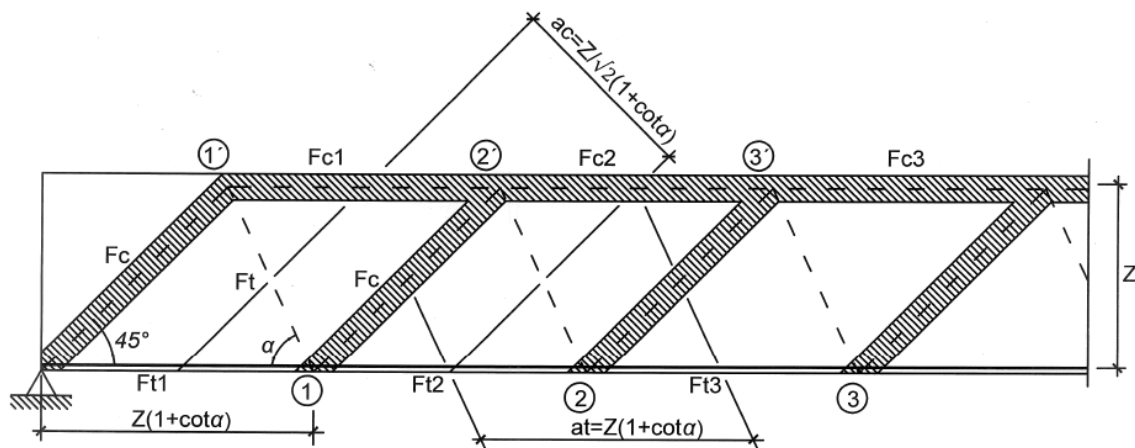


Fig. 1 – Modelo Estrutural de Morsch.

Por sua vez a tracção inclinada de  $\alpha$  e instalada por unidade de comprimento é dada por

$$F't = Ft / at ; \quad \text{Sendo} \quad at = Z * (1 + \cot \alpha) \quad \text{tem-se}$$

$$F't = (T/Z) * (1/(\sin \alpha + \cos \alpha)).$$

A tensão instalada na armadura por unidade de comprimento vale

$$\sigma_{at} = F't / A't = T/Z * t/At * 1/(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$\sigma_{at}$  é portanto, repete-se, uma tensão referida a uma armadura de alma por unidade de comprimento.

Da expressão anterior, tem-se

$$T = \sigma_{at} * At * (\sin \alpha + \cos \alpha) * Z/t$$

que é o esforço transverso absorvido por unidade de comprimento.

Quanto às bielas comprimidas, o outro elemento indispensável à resistência da alma, elas são teoricamente em número igual à dos elementos traccionados, mas a sua secção total é conhecida e vale  $ac * b_0$  qualquer que seja o número destes elementos.

Por sua vez o esforço total de compressão, instalado na alma na extensão  $at$  vale

$$Fc = T * \sqrt{2} \quad \text{e portanto a tensão na biela comprimida vale}$$



## Resistência ao Esforço Transverso

---

$$\sigma_{b45^\circ} = T * \sqrt{2} / (ac * b_0)$$

Ou seja com

$$ac = at / \sqrt{2}; \quad \sigma_{b45^\circ} = 2 * T / (b * z) * 1 / (1 + \cot \alpha) = 2 * \tau_0 / (1 + \cot \alpha)$$

Portanto tem-se:

$$\sigma_{b45^\circ} = 2 * \tau_0, \quad \text{para estribos verticais}$$

$$\sigma_{b45^\circ} = \tau_0 \quad \text{para estribos inclinados a } 45^\circ$$

É a partir da dedução de  $\sigma_{b45^\circ}$  que as normas fixam os valores máximos da tensão convencional  $\tau_0$ , de forma a se garantir a não rotura das bielas comprimidas.

Outra questão a esclarecer é a definição do esforço transverso de cálculo que deve ser confrontado com o valor fornecido pela expressão

$$T = \sigma_{at} * A_t * (\sin \alpha + \cos \alpha) * Z / t$$

Se a sobrecarga está aplicada na face superior da viga (vigas T, por exemplo) o  $T$  deve corresponder à abcissa da dobra inferior do varão e se está aplicado na face inferior, à abcissa da dobra superior. Só para cargas aplicadas no eixo da viga, ou igualmente distribuídas pelas duas faces, é que o  $T$  se define para o cruzamento do eixo da viga com o varão inclinado.

Observa-se que às fórmulas de Mörsch se podem fazer as seguintes críticas:

- Estão baseadas numa densidade uniforme de armadura, definida por uma certa área por unidade de comprimento.
- Apenas atendem ao equilíbrio estático, não considerando a influência fundamental da compatibilização das deformações axiais das escoras e estribos ou varões inclinados.
- Não consideram a apreciável influência da armadura horizontal, junto dos apoios, não entrando com ela directamente nos cálculos.
- As fórmulas de Mörsch apenas conduzem a resultados válidos quando os seus valores são corrigidos de forma mais ou menos empírica, de modo a corresponderem aos obtidos em ensaios.



### 3. EC2 E O MODELO DE ESCORAS E TIRANTES

Recentemente, o conceito da treliça foi alargado pelos trabalhos de Schaich, Thurlimann, Morti, Collins, MacGregor, entre outros. Estes autores chegaram à conclusão que o ângulo de inclinação das escoras de betão geralmente não é de 45° mas pode oscilar entre 25° e 65°, dependendo da quantidade de armadura, o que levou ao desenvolvimento do “Método das bielas de inclinação variável”. Este modelo tem como pressuposto a existência de um esquema estrutural idêntico ao sugerido por Mörsch com a diferença de considerar diferentes inclinações da biela tal como o nome indica.

No Eurocódigo 2, é proposto para análise e dimensionamento de estruturas sujeitas ao esforço transversal o “Método das bielas de inclinação variável”. De acordo com este regulamento, a segurança é verificada se o esforço actuante,  $V_{Ed}$ , for inferior à parcela correspondente à resistência do betão,  $V_{Rd,c}$ , ou à parcela correspondente à resistência dos estribos,  $V_{Rd,s}$ , respeitando sempre o valor de resistência das escoras ao esmagamento,  $V_{Rd,max}$ , e o comprimento de amarração da armadura adicional devido à inclinação das bielas,  $a_L$ .

É de salientar que, de acordo com o EC2, se o valor de  $V_{Ed}$  for inferior a  $V_{Rd,c}$ , apenas é necessário armar a viga com a armadura transversal mínima, indicada neste regulamento, caso  $V_{Ed}$  seja superior a  $V_{Rd,c}$ , a resistência atribuída ao betão é desprezada contando-se apenas com  $V_{Rd,s}$ .

De acordo com este regulamento, o valor de cálculo do esforço transversal resistente relativamente à contribuição do betão é dado por:

$$V_{Rd,c} = 0.12 \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) \cdot (100 \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} \cdot b_w \cdot d$$

Relativamente ao esforço transversal máximo para que não haja esmagamento das escoras de betão que se encontram à compressão, a equação proposta é a seguinte:

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} b_w z \cdot 0.6 f_{cd} \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta}$$

Com  $1 < \cot \theta < 2.5$  em que também é proposto para o dimensionamento de armadura a equação seguinte:

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot z \cdot f_{ywd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

O cálculo do parâmetro,  $a_L$ , aquando da dispensa de armadura longitudinal, é feito a partir da seguinte equação:

$$a_L = z(\cot \theta + \cot \alpha) / 2$$

Para além de aumentar o comprimento  $a_L$ , o Eurocódigo propõe um acréscimo de tracção na armadura longitudinal,  $\Delta F_{td}$ , calculado pela equação:

$$\Delta F_{td} = 0.5 \cdot V_{Ed} (\cot \theta - \cot \alpha)$$

#### 4. O MODEL CODE DE 2010 E O MCFT

Na Modified Compression Field Theory (MCFT) o betão fendilhado é tratado como um novo material com as suas características próprias de tensão-extensão. Este modelo considera as tensões de tracção no betão entre as fendas, e emprega relações tensão-extensão (médias), experimentalmente verificadas, para o betão fendilhado. É também atribuída importância às condições de tensão local nas fendas, pois as tensões nos varões da armadura variam ao longo do seu comprimento, sendo maiores na localização das fendas. Entretanto o modelo considera que as fracções do betão fendilhado, que são limitadas pelas superfícies rugosas das fendas, são capazes de transmitir tensões de corte e de compressão no local de contacto, mas não tensões de tracção. As forças aplicadas ao elemento de betão armado são resistidas pelas tensões no betão e na armadura.

Vecchio e Collins demonstraram que a tensão principal de compressão no betão é função, não só da extensão principal de compressão mas também da extensão principal de tracção. Portanto, o betão fendilhado sujeito a altas tensões de tracção na direcção normal à compressão fica menos resistente do que o betão testado em provetes cilíndricos. As variações locais que ocorrem nas fendas são importantes porque a capacidade de carga de um elemento submetido a tensões biaxiais pode ser regulada pela capacidade da armadura





em transmitir a tensão através das fendas. A direcção da fenda crítica é assumida normal à direcção da extensão principal de tracção.

Assumindo que maioria dos betões fendilha ao longo da interface entre a pasta de cimento e as partículas agregadas, as fendas rugosas resultantes podem transferir, segundo o MCFT, tensões de corte através do fenómeno “aggregate interlock”. A relação entre as tensões de corte na fenda e a largura da abertura da fenda depende assim da dimensão máxima do agregado. A largura da fenda pode ser calculada através do produto entre a extensão principal de tracção e o espaçamento de fendas.

As relações do MCFT podem então ser utilizadas para proceder à verificação e dimensionamento ao esforço transverso de elementos estruturais, assumindo que a tensão de corte na alma da secção é igual à força de corte a dividir pela área efectiva de corte e que, na rotura, as armaduras estão em cedência, obtém-se a expressão:

$$V_r = V_c + V_s$$

$$V_r = \sigma_1 b_w z \cdot \cot \theta + \frac{A_s f_s}{s} z \cdot \cot \theta$$

No entanto a parcela  $\sigma_1 \cdot \cot \theta$  é substituída por  $\beta \sqrt{f_c}$  em que  $\beta$  é justificado como um factor de tensão de tracção no betão que revela a capacidade do betão diagonalmente comprimido resistir ao esforço transverso.

Como se referiu, segundo Collins e Vecchio a capacidade de resistência da alma de uma viga ao esforço transverso está relacionada com a extensão longitudinal na alma. Quanto maior for a extensão longitudinal, menor será a tensão de corte necessária à rotura na alma, assim, no cálculo da capacidade de carga ao esforço transverso numa viga, é conservativo analisar a maior extensão longitudinal que ocorre na alma.

O modelo apresentado no MC10 tem como base o MCFT, sendo que no seu nível III a sua aproximação ao modelo é máxima. Assim sendo, neste documento quando se faz referência ao MC10 o modelo que se aplica é apenas o do Nível III.

No código referido, a parcela de resistência devida ao betão é dada por:



## Resistência ao Esforço Transverso

---

$$V_{Rd,c} = k_v \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_w z$$

Nesta equação o coeficiente  $k_v$  é determinado a partir da interacção entre os agregados na fenda o que leva a que a resistência seja directamente proporcional a abertura da mesma calculada através das variáveis correspondentes ao espaçamento entre fendas e à extensão perpendicular às mesmas.

A determinação da extensão é feita a partir da carga aplicada ou do esforço resistente, do pré-esforço existente ou não, das propriedades do material e da armadura de flexão entre outros. É também importante referir que esta extensão se refere à extensão a meio da secção da peça. O cálculo de  $\varepsilon_x$  implica que haja um momento actuante na peça de pelo menos  $V_{Ed} \cdot z$  e é dado por:

$$\varepsilon_x = \frac{\frac{M_{ed}}{z} + V_{ed} + 0.5N_{ed} - A_p f_{p0}}{2(E_s A_s + E_p A_p)}$$

em que  $A_p$  corresponde à área de armadura de pré-esforço e  $f_{p0}$  é a tensão nos cordões quando se dá a descompressão do betão.

Neste modelo a resistência  $V_{Rd,c}$  é determinada tendo em conta o coeficiente  $k_v$ . A determinação deste coeficiente depende da taxa de armadura transversal a adoptar para a viga, sendo o mesmo dependente unicamente da extensão na secção,  $\varepsilon_x$ , no caso de ser armado. Se o elemento não for armado  $k_v$  depende de  $\varepsilon_x$  e da rugosidade da fenda quantificada a partir do coeficiente  $k_{dg}$  na qual entra o parâmetro  $d_g$  que diz respeito ao diâmetro máximo dos agregados do elemento. A extensão da secção permite também, segundo os autores, determinar o ângulo da inclinação das bielas que não influencia directamente a resistência  $V_{Rd,c}$  mas sim a capacidade resistente dos estribos. As equações simplificadas propostas neste modelo são de seguida apresentadas:

$$\theta = 29^\circ + 7000\varepsilon_x$$

$$k_v = \frac{0.4}{1 + 1500\varepsilon_x} \cdot \frac{1300}{1000 + 0.7k_{dg}z} \quad \text{Se } \rho_w = 0$$

$$k_v = \frac{0.4}{1 + 1500\varepsilon_x} \quad \text{Se } \rho_w \geq 0.08 \sqrt{f_{ck}} / f_{yk}$$

$$k_{dg} = \frac{48}{16 + d_g} \geq 1.15$$

O Model Code permite diferentes patamares de rigor de cálculo materializados em 4 níveis. O rigor vai aumentando segundo os níveis levando a resultados menos conservativos. O nível I de aproximação é o aconselhado para o projecto de novas estruturas, o nível II é apropriado tanto para o projecto de novas estruturas como para a verificação de elementos existentes, o nível III corresponde a casos especiais devido a carregamentos particulares ou estruturas que necessitam de uma análise mais detalhada, o nível IV corresponde a uma análise não linear.



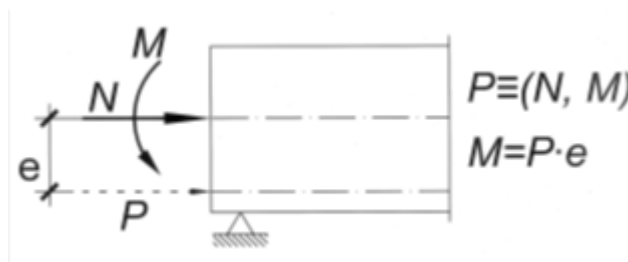
## Resistência ao Esforço Transverso

---

## ANEXO 2

### ESFORÇO TRANSVERSO COM COMPRESSÃO

Um esforço exercido paralelamente ao eixo de um elemento linear de betão, pode ser como se sabe representado por uma força axial e um momento,

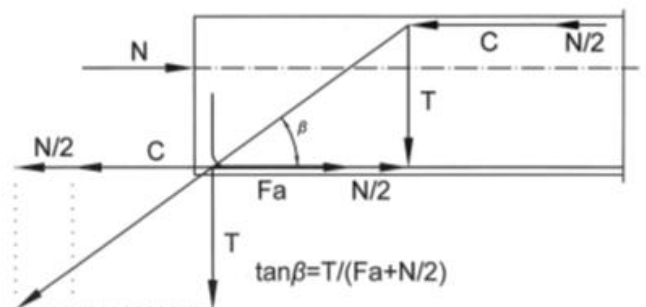
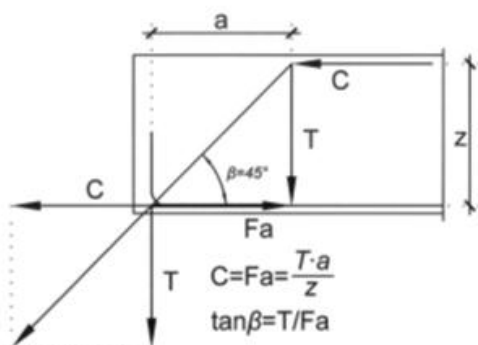


Estas forças originam esforços que irão ser adicionados às solicitações externas ao longo do seu vão que se traduzem geralmente de um modo esquemático por um banzo comprimido, um banzo traccionado e diagonais comprimidas e traccionadas.

No caso de N ser uma força de compressão, a compressão do banzo comprimido irá aumentar fazendo com que

$$\tan \beta = (T / (C + \frac{N}{2})) * (b / b_0)$$

e portanto o ângulo  $\beta$  diminua.



Logo ao acrescentar a força de compressão  $N$  vemos que para um mesmo  $T$  o valor da carga  $p$  última aumenta. Vê-se ainda que a área de armadura horizontal necessária para resistir à força de tracção

$F_a = T * a/z$  continua a ser necessária neste caso (um apoio extremo).

A compressão instalada nas escoras também aumenta mas o limite máximo para  $V_{Rd}$  adoptado pelos regulamentos dispensa a verificação do seu esmagamento.

No caso de  $N$  ser uma força de tracção, a compressão do banzo comprimido irá diminuir fazendo com que

$$\tan \beta = (T / (C - \frac{N}{2})) * (b / b_0)$$

e portanto o ângulo  $\beta$  aumentem, aumentando ainda a necessidade de armaduras horizontais quer no banzo traccionado quer no banzo comprimido se o valor da descompressão for importante.

Em Construções de Betão –Vol.1 Leonhardt e Monnig, lê-se em - Flexão composta com linha neutra na secção transversal,

“... o dimensionamento da armadura de esforço transverso apresenta sempre grandes reservas de segurança. A DIN 1045, por isso, estabelece que a influência de forças normais no dimensionamento ao esforço transverso pode ser desprezada, desde que a linha neutra esteja dentro da secção transversal.”

em – Compressão excêntrica com linha neutra fora da secção transversal,

“... as tensões principais de tracção são nesse caso muito pequenas, de modo que os tipos de rotura por esforço transverso, ..., não devem causar preocupação.”

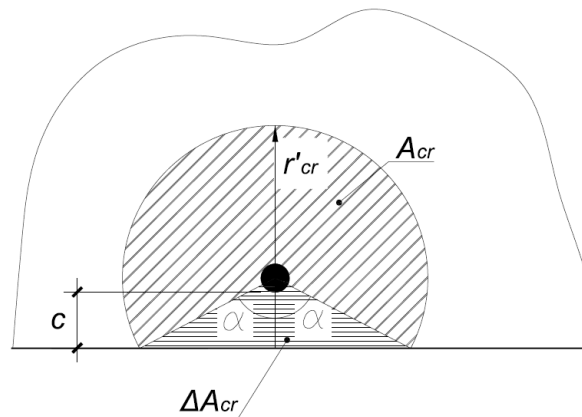
e em – Tracção excêntrica com linha neutra fora da secção transversal,

“...mais importante que o uso dos estribos assim calculados é a disposição construtiva de ordem prática: pequeno espaçamento entre os estribos e completo envolvimento de ambas as armaduras longitudinais pelos estribos ....”.

## ANEXO 3

### *Efeito dos recobrimentos das armaduras*

Para varões localizados junto às faces da secção há que atender ao efeito desfavorável do recobrimento  $c$ , que se traduz no aumento da área fissurada, em relação à do varão situado no interior da peça.



Isto acontece pois a contribuição da área  $\Delta A_{cr}$ , representada na figura, é desprezada na definição de  $A_{cr}$  ( $A_a \cdot f_{syd} / f_{ctm}$ ) e também terá de ser descontada à restante área de tirante não fissurado.

O uso de uma armadura de pele substitui o acréscimo  $\Delta A_{cr}$  de betão fissurado, permitindo que aquele acréscimo passe a ser nulo, isto é, que a armadura principal possa ser considerada interior.

O recobrimento da armadura de pele é escolhido de forma que o seu efeito aparente seja nulo, isto é que esta armadura seja efectivamente uma armadura interior, devido ao reduzido valor dos seus diâmetros.

As expressões e os valores adoptados no cálculo deste acréscimo  $\Delta A_{cr}$  são

$$A_{cr} = A_a \cdot f_{syd} / f_{ctm} \quad ; \quad \alpha = \arccos\left(\left(c + \frac{\phi}{2}\right) / \sqrt{A_{cr} / \pi}\right)$$

$$r'_{cr} = \sqrt{A_{cr} / (\pi - \alpha)} \quad ; \quad \Delta A_{cr} = \left(c + \frac{\phi}{2}\right) * \sqrt{r'_{cr}{}^2 - \left(c + \frac{\phi}{2}\right)^2}$$

Temos então que a área de tirante não fissurado fica

$$A_{t\beta} = b_0 \cdot Z / \tan \beta - (A_{cr} + \Delta A_{cr}) / 2s \cdot Z / \tan \beta$$

ver 4.2

## ANEXO 4

### ***DEDUÇÃO DOS VALORES DE $E_t$ E DE $A_t$ A ADOPTAR***

Este anexo destina-se a justificar os valores de  $E_c$ ,  $A_c$ ,  $E_t$ , e  $A_t$  utilizados na compatibilidade de deformações.

Sabemos que  $E_c = E_{bet}$  e que  $A_c$  é igual à área da escora  $A_c = Z \cdot (\cot\beta + \cot\alpha) \cdot b_0 \cdot \sin\beta$ .

Quanto ao tirante, a sua secção será constituída pela soma entre a área do varão equivalente e do betão colaborante envolvente com um diâmetro aproximadamente entre 12 e 15 vezes o varão equivalente.

$\phi$	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/40	C40/50	C45/55	C50/60	C55/67
<b>S235</b>	10,4	9,6	8,9	8,4	8,0	7,6	7,3	7,1	6,9
<b>S400</b>	13,5	12,5	11,6	11,0	10,4	10,0	9,6	9,2	9,0
<b>S500</b>	15,1	14,0	13,0	12,3	11,6	11,1	10,7	10,3	10,0
<b>S600</b>	16,5	15,4	14,3	13,4	12,7	12,2	11,7	11,3	11,0

Logo, sendo

$$A_a = \phi_{eq}^2 * \frac{\pi}{4}$$

e a área da secção efectiva do betão envolvente

$$A_{b, env} = (12^2 * \phi_{eq}^2) * \frac{\pi}{4}$$

para armaduras transversais habituais como, p.ex.,

8 $\phi$ 8/m ( $\alpha=90^\circ$ )(S400),  $\phi_{eq} = 3.31$  cm, temos que a tensão de tracção  $f_{ct}$  que  $A_{b, env}$  suporta isolada (sem a armadura) é:

$$f_{ct} = A_a * f_{syd} / A_{b, env} = 1.75 < f_{ctm} (C16/20) = 1.9$$

não se encontrando portanto o betão fissurado, podendo então considerar-se que o módulo de elasticidade do tirante é igual ao do betão.

$$E_t = E_{betão} = E_c$$

Sempre que  $2s$  e  $b_0$  sejam superiores a  $12\phi$  (em que  $\phi$  corresponde à soma dos varões de uma mesma camada) pode-se dizer que a secção do tirante vale:

$$A_t = (12\phi_{eq})^2 + (m-1) \cdot A_a \approx (12\phi_{eq})^2$$





## ANEXO 5

### ***DEDUÇÃO DOS FACTORES QUE INFLUENCIAM A RESISTENCIA DAS ESCORAS DE BETÃO***

Temos:

$$F_c = \frac{\sin^3 \beta}{\sin^3 \alpha} \cdot \frac{b_0 \cdot 2s}{(12 \cdot \phi_{eq})^2} \cdot (A_a \cdot \sigma_a)$$

$$F_c = \frac{\sin^3 \beta}{\sin^3 \alpha} \cdot z \cdot (\cot \beta + \cot \alpha) \cdot b_0 \cdot \sigma_a \cdot \frac{\pi}{576}$$

Logo o esforço na biela depende, para além da geometria da secção, da inclinação do tirante de aço, da inclinação da biela e da classe de aço que se utiliza. Considerando que o esmagamento na biela é dado por:

$$F_{esc} = b_0 \cdot b_{ap} \cdot \sin \beta \cdot \sigma_b$$

$$F_{esc} = b_0 \cdot 0.6 \cdot z \cdot \sin \beta \cdot \sigma_b$$

Se compararmos  $F_c$  com  $F_{esc}$ , para uma inclinação da biela de  $38^\circ$  e com  $\alpha = 90^\circ$  podemos verificar que a rotura se dará sempre pelo tirante.

Rotura	$F_c$	103	176	220	264
$F_{esc}$		<b>S235</b>	<b>S400</b>	<b>S500</b>	<b>S600</b>
678	<b>C16/20</b>	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir
848	<b>C20/25</b>	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir
1060	<b>C25/30</b>	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir
1272	<b>C30/37</b>	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir
1484	<b>C35/40</b>	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir
1696	<b>C40/45</b>	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir
1908	<b>C45/50</b>	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir
2120	<b>C50/55</b>	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir

## Resistência ao Esforço Transverso

---

No entanto, se inclinarmos o tirante de aço a 45º poderemos ter o esmagamento da escora a condicionar a resistência ao esforço transversal, principalmente em betões de baixa resistência combinados com aços de resistência elevada.

<b>Rotura</b>	<b>F<sub>c</sub></b>	523	891	1113	1336
<b>F<sub>esc</sub></b>		<b>S235</b>	<b>S400</b>	<b>S500</b>	<b>S600</b>
678	<b>C16/20</b>	Rot.Tir	<i>Rot. Esc.</i>	<i>Rot. Esc.</i>	<i>Rot. Esc.</i>
848	<b>C20/25</b>	Rot.Tir	<i>Rot. Esc.</i>	<i>Rot. Esc.</i>	<i>Rot. Esc.</i>
1060	<b>C25/30</b>	Rot.Tir	Rot.Tir	<i>Rot. Esc.</i>	<i>Rot. Esc.</i>
1272	<b>C30/37</b>	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir	<i>Rot. Esc.</i>
1484	<b>C35/40</b>	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir
1696	<b>C40/45</b>	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir
1908	<b>C45/50</b>	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir
2120	<b>C50/55</b>	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir	Rot.Tir

Como se pode comprovar, a geometria da peça não condiciona este cálculo uma vez que a sua proporção em F<sub>esc</sub> e em F<sub>c</sub> é igual.