



Rotura por Punçoamento

Estudo Técnico

Agosto de 2012

Elaborado por:

João Maria Sobreira

Com a colaboração de:

Jorge Nunes da Silva

Jorge Ribeirinho Soares

ALINHAMENTO
esc. 1/100

ALINHAMENTO
esc. 1/100

Prefácio

O Punçoamento é um caso particular do Esforço Transverso que ocorre em elementos planos submetidos à acção de cargas concentradas.

Dadas as restrições impostas pelos regulamentos em vigor na década de 70, o Eng. Araújo Sobreira, com a colaboração do Eng. João Maria Sobreira, realizaram estudos referentes a este assunto chegando a publicar os mesmos em 1983.

Na época, estes estudos permitiram aos seus autores resolver alguns problemas da Engenharia que não tinham solução aparente, nomeadamente no que diz respeito ao punçoamento em lajes assimetricamente apoiadas em pilares, ou apoiadas em pilares de bordo ou de canto. Por vezes, para confirmar a segurança destes elementos eram realizados ensaios em obra como foi o caso da laje do armazém de papel na Portucel de Viana (1977), destinado a suportar uma sobrecarga de 150 kN/m^2 (correspondente a 3 rolos de papel empilhados), com uma malha de pilares de aproximadamente 4.5 por 4.5 e uma espessura de laje de 0,40 m, em que se deixou cair de um empilhador um rolo de 50 kN (acidente possível de acontecer na realidade), de modo a testar o comportamento da laje.

Posteriormente, o Eng. João Maria Sobreira com a colaboração do Eng. Nunes da Silva realizaram estudos comparativos com a regulamentação existente de forma a verificar o modelo e desenvolveram ferramentas de cálculo para que a sua aplicação em projecto fosse mais sistemática.

Recentemente (2011), a propósito da dissertação de Mestrado do Eng. Jorge Ribeirinho Soares relativo ao Corte em Estruturas de Betão Armado foi reelaborado o estudo tendo agora em consideração a comparação com a regulamentação mais actual.



Índice Geral

1. INTRODUÇÃO/CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	1
2. RESISTÊNCIA AO PUNÇOAMENTO EM LAJES SIMETRICAMENTE APOIADAS	9
2.1. RESISTÊNCIA V_{RD} DO CONE DE PUNÇOAMENTO.....	9
2.2. ARMADURA HORIZONTAL DE EQUILÍBRIO DO CONE DE PUNÇOAMENTO EM LAJES SIMETRICAMENTE SOLICITADAS	13
2.3. RESISTÊNCIA DE LAJES SEM ARMADURA TRANSVERSAL.....	16
2.4. RESISTÊNCIA AO PUNÇOAMENTO DE LAJES COM ARMADURA TRANSVERSAL	18
3. RESISTÊNCIA DE CÁLCULO AO PUNÇOAMENTO DE LAJES ASSIMETRICAMENTE APOIADAS.....	19
3.1. INFLUÊNCIA DE UM MOMENTO APLICADO NO CONE PUNÇOAMENTO	19
3.2. DISTRIBUIÇÃO DA ARMADURA HORIZONTAL PELAS DUAS FACES DA LAJE.....	21
3.3. REDUÇÃO DA RESISTÊNCIA $V_{CONE MAX}$ DO CONE DE PUNÇOAMENTO DEVIDO À ASSIMETRIA DA MALHA DE APOIO DA LAJE.....	23
4. DIVERSOS TEMAS COMPLEMENTARES À TEORIA APRESENTADA	27
4.1. PUNÇOAMENTO EM LAJE DE FUNDAÇÃO (SAPATAS E ENSOLEIRAMENTO)	27
4.2. PUNÇOAMENTO DE LAJES SUBMETIDAS A CARGAS CONCENTRADAS	29
4.3. PUNÇOAMENTO DE LAJES SUBMETIDAS A ACÇÕES TRANSVERSAIS.....	29
4.4. LAJES COM ABERTURAS PRÓXIMAS DO APOIO	30
4.5. DIÂMETRO DO PILAR CILÍNDRICO EQUIVALENTE	32
4.6. MALHAS DE APOIO; SUA DEFINIÇÃO	34
4.7. EXPRESSÕES PARA A DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS NÃO EQUILIBRADOS (OU DISTRIBUÍDOS) ..	35
4.8. COMPARAÇÃO COM A ACTUAL REGULAMENTAÇÃO	40
4.8.1. CONFRONTO DAS CONCLUSÕES DA ALINEA 2.3. COM AS RPU (KINNUNEN E NYLANDER)	40
4.8.2. REBAP	41
4.8.3. EC2	42
4.8.4. ACI.....	44
4.8.5. MC10	45
4.8.6. EXEMPLOS	47
BIBLIOGRAFIA	49

1

INTRODUÇÃO/CONSIDERAÇÕES GERAIS

O punçoamento de lajes apoiadas em pilares é um problema que ainda não teve até hoje uma solução clara e esclarecedora que permita aos projectistas aplicarem os critérios normalizados com o conhecimento do fenómeno físico em si e do grau de segurança efectiva que estão a adoptar.

Baseados em tensões convencionais de corte, os critérios adoptados não correspondem a um modelo de rotura global da laje apoiada em pilares e conduzem a soluções por vezes pouco económicas quando, por desconhecimento do comportamento real, se exagera nas limitações impostas, e ao contrário, pode-se ser conduzido a uma segurança insuficiente, quando se generalizam resultados obtidos em condições particulares de ensaio.

De modo a desenvolvermos a teoria de rotura ao punçoamento proposta neste estudo, vamos começar por analisar o comportamento á rotura de lajes maciças apoiadas em pilares recorrendo a alguns exemplos retirados do livro de L.L.Jones –R.H.Wood “YIELD-LINE ANALYSIS OF SLABS”.

Nos exemplos a seguir apresentados vamos ver que os mecanismos de rotura por flexão podem apresentar diversas configurações das lajes.

EXEMPLO 1 – LAJE APOIADA EM 4 PILARES

A Figura 1.1 mostra duas configurações possíveis. A configuração a) necessita de armadura inferior para resistir a um momento positivo $m=p \cdot l^2/8$ desde que sobre os pilares exista armadura para resistir aos momentos negativo e positivo originados pela configuração b), pois embora o momento originado pela configuração b) $m=p \cdot l^2/12,56$ não seja condicionante, caso

Rotura por Punçoamento

não exista armadura superior sobre os pilares, o momento m aumenta para $m = p \cdot l^2 / 6,28$ quando R tende para zero, originando uma redução na carga de colapso de 21,5%. Assim sendo, essa armadura superior destina-se a impedir a formação do mecanismo de rotura b).

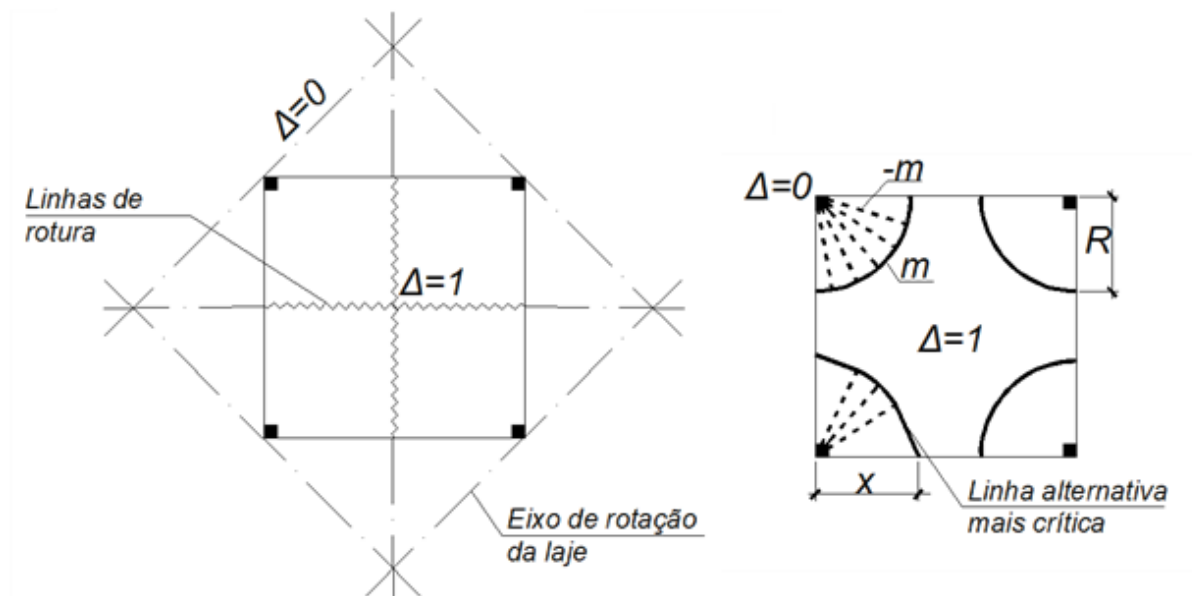


Fig.1.1 – Mecanismo de rotura a (esq.) e mecanismo de rotura b (dir.).

EXEMPLO 2 - CONSOLA COM CARGA CONCENTRADA NO BORDO

Também no caso de uma carga concentrada no extremo de uma consola, embora o modo primário de rotura seja o de uma consola submetida a momento negativo, necessitamos de armadura inferior para resistir aos momentos positivos m indicados na figura 1.2.

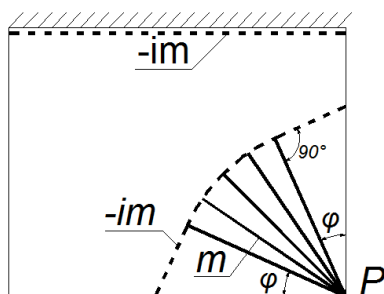


Fig.1.2 – Linhas de rotura resultantes de uma carga concentrada numa consola.

EXEMPLO 3 - LAJE APOIADA EM MALHA DE PILARES

No caso de lajes maciças apoiadas em pilares (sem vigas) podemos considerar dois modos de rotura, conforme a figura 1.3:

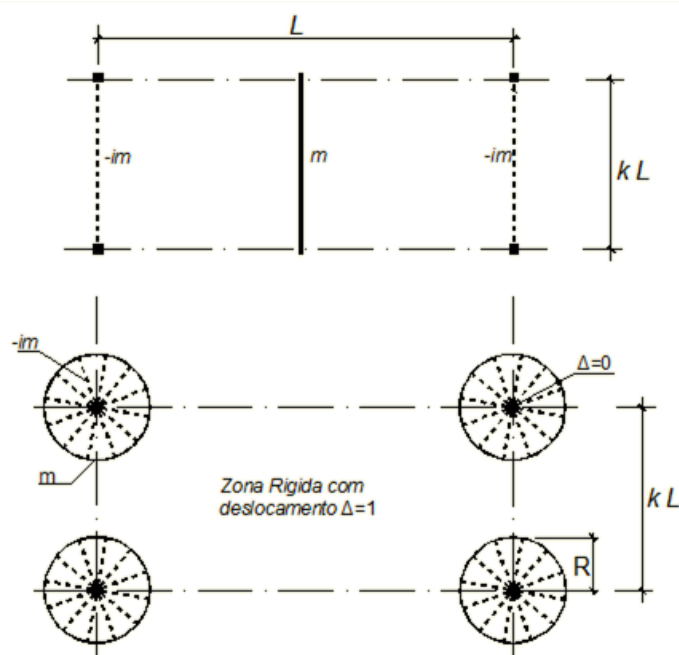


Fig.1.3 – 1º modo de rotura (acima) e 2º modo de rotura (em baixo).

Para o 1º modo: $m = p \cdot l^2 / (8 \cdot (1 + i))$

Para o 2º modo: $m = p \cdot l^2 \cdot (\alpha - \pi/3 \cdot R^2/L^2) / (2 \cdot \pi \cdot (1 + i))$

Estas duas equações permitem-nos concluir da necessidade de armar inferiormente a laje mesmo na zona dos apoios, e superiormente em toda uma zona de raio R (mais o comprimento de amarração), sabendo que, quanto menor for R maior será o momento positivo m .

Nos exemplos apresentados, como em outros possíveis, verifica-se que o aparecimento de um ou outro dos mecanismos de rotura, dependerá da quantidade e extensão quer da armadura horizontal inferior, quer da armadura horizontal superior.

Estas armaduras são normalmente constituídas por malhas quadradas com percentagem ρ igual ou diferente nos dois sentidos.

Rotura por Punçoamento

A flexão portanto para além das linhas de rotura no vão, pode originar em torno das cargas concentradas fissuras radiais, criadas por momentos negativos m'_r e limitadas exteriormente por fissuras curvas, devida a momentos positivos m_t .

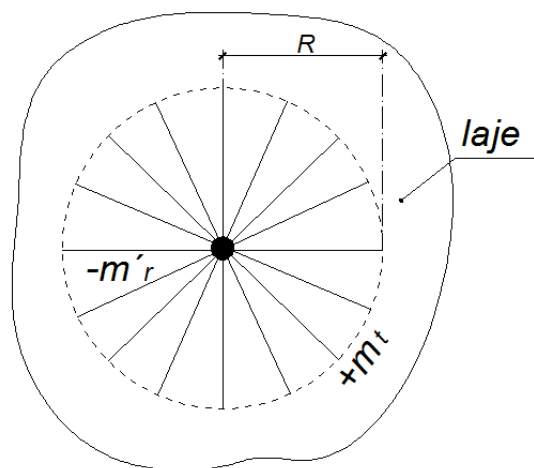


Fig.1.4 – Linhas de rotura sobre um pilar.

Assim, na zona em volta dos pilares existem, em estado de pré-rotura, momentos radiais e tangenciais, que sendo máximos junto ao pilar se reduzem rapidamente à medida que se afastam deste.

Enquanto as fissuras no vão acabam sempre por se formar (se outros mecanismos não originarem previamente a rotura local da laje), as fissuras de continuidade e sobretudo o valor e a variação dos momentos negativos nelas instalados, dependem da forma como a continuidade sobre o pilar pode ser garantida pela restante parte da estrutura, o que está fundamentalmente relacionado com a localização daquele (interior à laje ou no bordo desta), com a rigidez relativa entre pilar e laje e outros factores de assimetria.

Para termos em conta estas assimetrias adoptamos neste estudo por modelo que se baseia na simulação da existência de vigas que ligam os pilares entre si, com a espessura da laje e secção variável, conforme fig. 1.5.

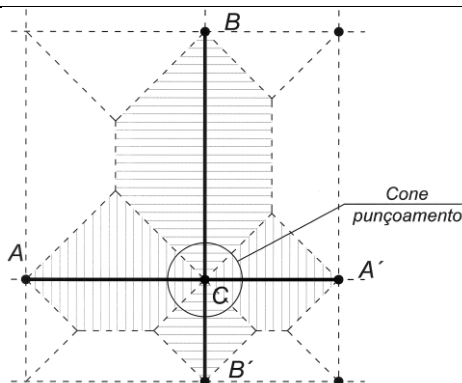


Fig.1.5 – Esquema de vigas que ligam os pilares entre si.

O comportamento destas vigas pode ser considerado idêntico ao de vigas vulgares, isto é sujeitas aos diversos tipos de esforços, nomeadamente esforços de flexão, compressão e tracção, torção e esforço transverso.

Estas vigas são portanto submetidas a um esforço transverso, que neste caso é crítico junto do apoio nos pilares, pois além de aí ter o seu valor máximo, também é exercido sobre a secção mínima da viga. Se considerarmos todas as vigas que concorrem num pilar obtemos um perímetro crítico de resistência ao esforço transverso que agora iremos designar de resistência ao punçoamento.

De modo a analisar a resistência ao punçoamento, os suecos Kinnunen e Nylander procederam a uma série de ensaios em que procuraram definir a carga de punçoamento de uma laje apoiada num pilar, à custa da definição do mecanismo de rotura de uma placa circular apoiada num pilar, carregada no bordo; assim concluíram que para as percentagens habituais de armadura horizontal este mecanismo corresponde à formação de um cone de geratrizes a 30° , apoiado sobre o topo da coluna.

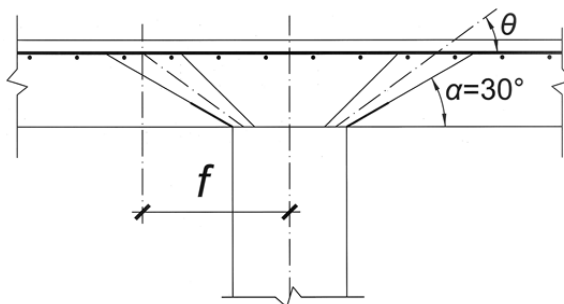


Fig.1.6 – Mecanismo de punçoamento.

Rotura por Punçoamento

Neste estudo o mecanismo de rotura proposto através do qual a laje desenvolve a sua resistência ao punçoamento é idêntico ao do esforço transverso. De facto, o punçoamento é um caso particular deste esforço e como tal a sua resistência baseia-se na existência de bielas e tirantes (em anéis cónicos e cilíndricos), exigindo respectivamente armadura horizontal e estribos, estes quando a tracção efectiva nos tirantes ultrapassa a resistência do betão, tal como sucede na resistência ao esforço transverso.

A formação do cone de punçoamento corresponde ao alargamento da zona de apoio da laje no pilar; deste modo pode admitir-se que o aparecimento das linhas de rotura, características dos mecanismos de rotura primários atrás referidos, é precedido pela formação de vigas de secção variável em largura, apoiando-se nos cones de punçoamento dos pilares que formam a rede de apoio, fig. 1.6.

É com base neste esquema estrutural que as questões relacionadas com lajes apoiadas em malhas não simétricas de pilares (incluindo os pilares de bordo e de canto) são resolvidas pela teoria de rotura exposta neste estudo.

Para o pilar simetricamente solicitado os ensaios de Nylander permitiram a formulação de uma teoria que fornece a resistência de rotura do cone de punçoamento simetricamente solicitado; o seu método de cálculo e respectivas expressões são de difícil aplicação prática.

Para pilares simetricamente solicitados os ensaios de Nylander permitiram que o CEB-FIP estabelecesse nas suas Recommandations Pratiques Unifiées (RPU) de 1970 uma fórmula simples que fornece a carga máxima V_{Rd} que o cone de punçoamento pode suportar:

$$V_{Rd} = 4,5 * \sigma_{cd} * p * d \quad \text{com} \quad \sigma_{cd} = \sqrt{f_{ck}} / \gamma$$

p perímetro da secção característica

d altura útil da laje

Ver-se-á adiante que a resistência ao punçoamento se relaciona com o tirante circular de betão, enunciado no estudo sobre esforço transverso, sendo esta resistência, na maioria dos casos, condicionante relativamente à resistência do cone ao esmagamento.

A teoria que vai ser exposta considera de forma explícita todas as situações de apoio da laje e também todas as solicitações habituais da prática. Os seus resultados de base serão controlados através da sua comparação com o MC10, o Eurocódigo e o REBAP.

É importante realçar que a formação de bielas de compressão em apoios extremos de vigas depende fundamentalmente da armadura horizontal inferior, podendo mesmo não existir armadura superior, enquanto no caso de lajes apoiadas em pilares de canto ou de bordo, tangentes às linhas de bordo, existem normalmente armaduras horizontais inferiores e superiores como vimos.

Rotura por Punçãoamento

2

RESISTÊNCIA AO PUNÇOAMENTO EM LAJES SIMETRICAMENTE APOIADAS

2.1. RESISTÊNCIA V_{RD} DO CONE DE PUNÇOAMENTO

Por lajes simetricamente solicitadas entendem-se as lajes que transmitem ao cone de Punçoamento, por quadrantes simétricos, uma carga linear e uniforme r , fig. 2.1.

Em tal situação o anel cónico de Punçoamento designado habitualmente apenas por cone de Punçoamento, possui a resistência máxima.

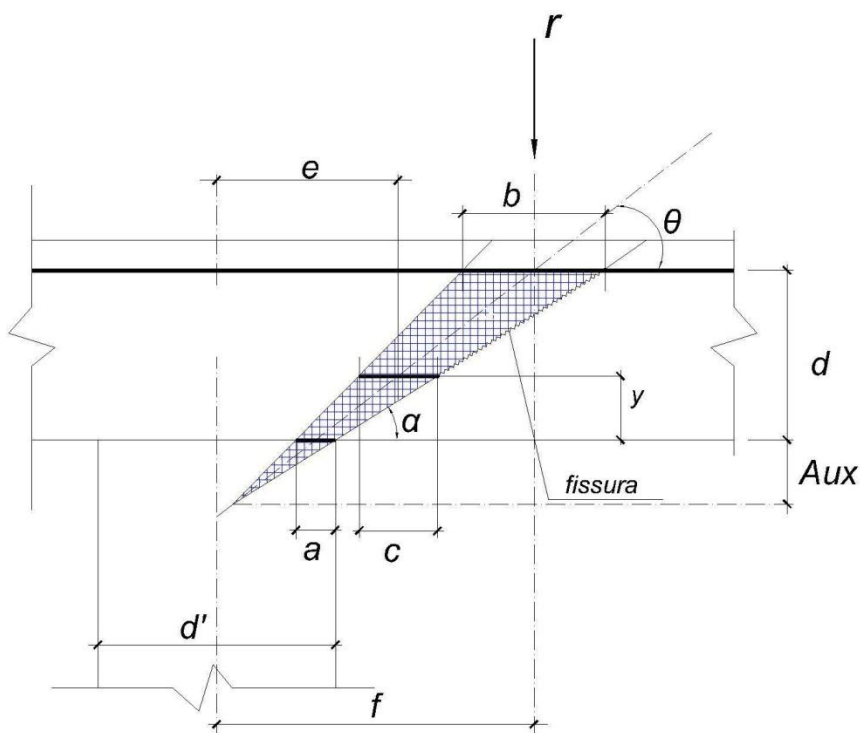


Fig. 2.1 – Definição geométrica do anel de Punçoamento

Rotura por Punçoamento

Sobre o topo de um pilar existe uma zona triaxialmente comprimida sendo a resistência do cone definida a partir da resistência f_{cd} do betão C20/25 e da secção do cone ao nível da zona comprimida inferior da laje, definida por y . O valor de $f_{cd}^{C20/25}$ será majorado de $\sqrt{\frac{f_{ck}}{20}}$, em que f_{ck} corresponde ao betão utilizado. De facto é nesta secção que a resistência do cone é a menor, quer pelo valor da tensão da rotura admissível, quer pela sua área resistente, visto que abaixo de y existe um estado de compressão triaxial e acima de y uma compressão é axial. A secção de resistência mínima do cone é dada assim por:

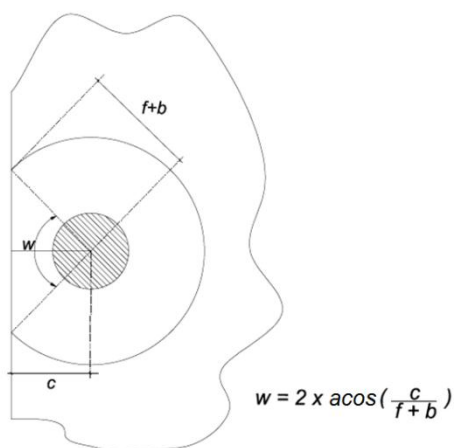
$$A_c = 2 \cdot \pi \cdot e \cdot c$$

a que corresponde uma resistência máxima ao Punçoamento dada por:

$$V_{\text{cone,máx}} = 2 \cdot \pi \cdot e \cdot c \cdot f_{cd} \cdot \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} \sin^2 \theta \geq V_{Ed}$$

No caso de pilares de bordo ou canto o ângulo 2π deverá ser reduzido do ângulo w quando a distância, c , do eixo do pilar ao bordo for menor que $f + b$ (Fig. 2.2).

Pilar de Bordo



Pilar de Canto

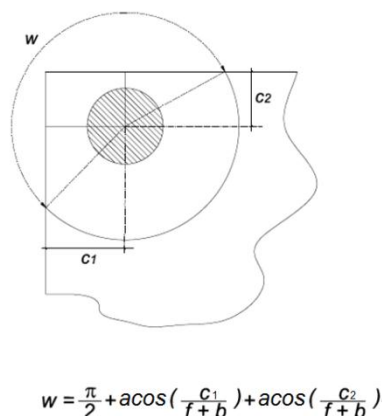


Fig. 2.2 – Perímetro crítico de punçoamento em pilares de bordo e de canto

Rotura por Punçoamento

As expressões que definem a forma geométrica do anel de Punçoamento, fig.2.1, dependem, além dos valores iniciais d e d' de cada problema, das seguintes grandezas:

- y - Altura do diagrama simplificado rectangular de tensões – extensões do betão.
- α - Inclinação da fissura de punçoamento, que os ensaios mostram ser cerca de 30° nas lajes correntes e 45° nas lajes de fundação (sapatas e ensoleiramentos gerais).
- a - largura de apoio do anel cónico de punçoamento sobre o pilar.
- θ - Inclinação do eixo do anel cónico de punçoamento

Se α for 30° admite-se θ igual a 36° , enquanto que se α for 45° admite-se θ igual a 51° .

Em relação ao valor de y tem de se observar que a zona comprimida do cone de Punçoamento está submetida a um estado de tensão triplo e que por isso a sua capacidade de deformação é muito mais reduzida do que a habitualmente considerada na flexão plana ($\epsilon_{cd} = 3,5\text{‰}$). Na realidade os ensaios de Nylander, fig.2.3, indicam que no Punçoamento se deve ter $\epsilon_{cd} \leq 1\text{‰}$.

Observa-se ainda nesta figura o forte aumento de ϵ_s radial da armadura horizontal a partir de certo valor da carga P , o que confirma a formação do anel cónico como consequência da fissuração tangencial da zona interior àquele anel.

Por outro lado, não será de admitir a variação linear de extensões, com a altura d da secção. À falta de experimentação directa, recorreu-se à teoria de Nylander e adoptou-se para y/d valores compatíveis com os por ela fornecidos de forma que os resultados obtidos pela teoria de rotura aqui exposta sejam idênticos aos daqueles ensaios.

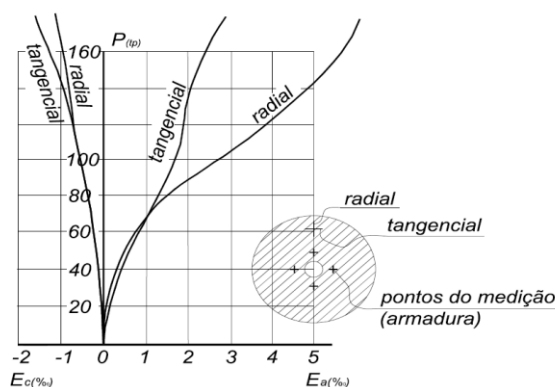


Fig.2.3 – Deformação no cone de Punçoamento.

Rotura por Punçoamento

De vários exemplos resolvidos pode-se concluir que a relação y/d é independente do diâmetro d' do pilar e vale aproximadamente 0.38, valor aliás próximo do que se obtém na flexão com aço A400 e diagrama linear de deformações.

Quanto ao valor de a , é dependente de d e d' ; os cálculos feitos permitiram, com aproximação suficiente, estabelecer as expressões seguintes:

$$2a = 0,33 d \quad , \text{ para } d'/d \leq 1,4$$

$$2a = 0,24 d \quad , \text{ para } 1,4 < d'/d \leq 3,5$$

Os valores de $V_{cone\ max}$ obtidos a partir destas relações e da expressão, acima escrita, em função de d e d' são para o betão de classe C20/25. Para outro qualquer betão as recomendações CEB-RPU de 1970 indicavam que se devia multiplicar o valor obtido para o C20/25 por $\sqrt{(f_{ck}/20)}$ e isto por imposição do risco de instabilidade elástica da base da biela cónica.

Ver-se-á ainda que o valor de $V_{cone\ max}$ está também limitado pela necessidade de se garantir ao betão daquela zona, multi-axialmente comprimido, a indispensável capacidade de deformação plástica.

Refira-se que os valores do ângulo acima fixados (30° para as lajes correntes e 45° para as lajes em sapatas e ensoleiramentos de fundação) estão relacionados com os valores da percentagem ρ_L das armaduras horizontais habitualmente utilizadas nestes dois tipos de lajes. As percentagens adoptadas são para as lajes $\leq 0,8\%$ e nas fundações cerca de $0,2\%$.

Para a definição do anel cónico e determinação dos valores de e , c , f temos :

$$b = a + d/\tan \alpha - d/\tan(2 * (\theta - \alpha) + \alpha)$$

$$aux = a * d/(b - a)$$

$$c = (y + aux) * a/aux$$

$$e = d'/2 + y/\tan \alpha - c/2$$

$$f = d'/2 + d/\tan \alpha - b/2$$

2.2. ARMADURA HORIZONTAL DE EQUILÍBRIO DO CONE DE PUNÇOAMENTO EM LAJES SIMETRICAMENTE SOLICITADAS

A armadura horizontal de equilíbrio do cone de Punçoamento é habitualmente formada por uma malha quadrada de varões, formando uma armadura isotrópica ou anisotrópica, conforme as percentagens ρ_{Lx} e ρ_{Ly} são iguais ou não em ambas as direcções de referência x e y , fig.2.4.

Se p_x e p_y forem as resistências lineares unitárias das armaduras e p for a respectiva resultante horizontal unitária das armaduras, uniforme por hipótese ao longo de todo o perímetro deste pois se considera que a laje está simetricamente solicitada, pode-se escrever:

$$p * ds = p_x * dy * \cos\gamma + p_y * dx * \sin\gamma$$

Sendo:

$$x = f * \cos\gamma ; y = f * \sin\gamma$$

$$dx = -f * \sin\gamma * d\gamma \quad \text{e} \quad dy = f * \cos\gamma * d\gamma$$

pode deduzir-se:

$$p * ds = p_x * f * \cos^2\gamma * d\gamma - p_y * f * \sin^2\gamma * d\gamma$$

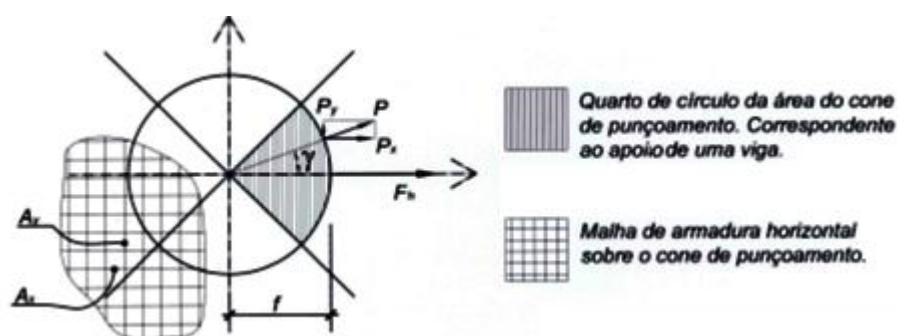


Fig.2.4 – Armaduras sobre o cone de punçoamento

Tendo-se presente que quando x e y variam de 0 a f , varia respectivamente de $\pi/2$ a 0 e de 0 a $\pi/2$, considerando $\int_0^{\pi/2} p * ds = Fh$, tem-se: $V_{Ed}/4 = Fh * tg\theta$

Rotura por Punçoamento

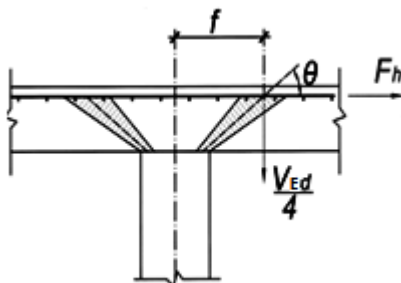


Fig.2.5 – Resultante no cone de punçoamento em cada quadrante.

F_h é a força desenvolvida pela malha da armadura horizontal num quarto de círculo do anel cónico de punçoamento. Sendo A_x e A_y a área de armadura horizontal superior segundo x e segundo y , e A a sua resultante $F_h = A * \sigma_{sd}$.

Com ρL igual á percentagem de armadura existente no quarto de círculo considerado

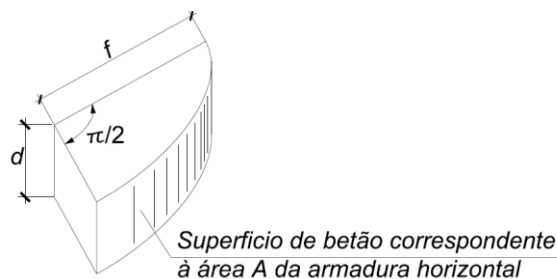


Fig.2.6 – Superfície de betão correspondente a A.

Logo $\rho L = A / ((\pi/2) * f * d)$ e $V_{Ed}/4 = (\pi/2) * f * d * \rho L * \sigma_{sd} * \tan \theta$

$$\rho L = \frac{V_{Ed}}{6.28 * f * d * \sigma_{sd} * \tan \theta} \leq 0,8\%$$

Limitação imposta para conferir ao betão do anel de Punçoamento a indispensável capacidade de deformação plástica compatível com a formação do mecanismo de rotura local.

A armadura horizontal deve ser aplicada segundo um quadrado de lado l_s tangente ao círculo de raio f , acrescida do comprimento de amarração, definido para a tensão σ_{sd} adoptada:

$$l_s = 2 * f + 2 * l_b * \sigma_{sd} / f_{syd}$$

Observa-se que esta armadura é normalmente integrada na que é exigida pelo momento de continuidade que os mecanismos de rotura por flexão da laje desenvolvem sobre o pilar.

Quanto à tensão σ_{sd} a adoptar, ela não pode ser f_{syd} , pois é evidente que um alongamento excessivo da armadura de estabilidade do cone de Punçoamento poderia aumentar o risco de encurvadura da zona triaxialmente comprimida da base do anel cónico.

Sem elementos experimentais disponíveis que possam servir de verificação optou-se por limitar aquele alongamento σ_{sd} através de um valor reduzido da abertura característica w_k da fissuração do betão.

Assim σ_{sd} deve corresponder a um $w_k \leq 0,15$ mm, o que para varões $\varnothing 16$ impõe uma tensão $\sigma_{sd} \leq 230$ MPa, para um aço de aderência melhorada (quadro 2.1), valor este que é igual ao fixado por Nylander. Por sua vez o Eurocódigo permite para a armadura transversal uma tensão de cerca de 315 MPa em lajes correntes, o que origina valores de $w_k \approx 0,15$ mm para varões $\varnothing 10$ que deve ser o maior diâmetro geralmente utilizado nesta armadura.

Quadro 2.1 – Tensões no aço (rugoso) admissíveis no punçoamento para $w_k = 0,15$ mm, o esforço máximo suportado por estribo (dois varões) e a área fissurada por estribo que deverá ser corrigida por $f_{ck}/20$ (f_{ck} em MPa)

Varão	6	8	10	12	16	20	mm
σ_{sd}	375	315	280	255	230	210	MPa

É-se portanto conduzido a admitir que o critério de se fixar $w_k \leq 0,15$ mm conduz a valores que se podem considerar sancionados pela regulamentação, embora nesta apenas se mencione directamente a armadura transversal, nada se dizendo em relação à armadura longitudinal. Aliás é fácil de verificar que a adopção de $\sigma_{sd} \leq 230$ Mpa juntamente com a limitação de $\rho_L < 0,8\%$ não permite valores de V_{Rd} superiores aos da fig.2.2, qualquer que seja a classe do betão.

Exemplo:

Betão C20/25 ; $f_{ck} = 20$ MPa ; $d = 0,25$ m ; $d' = 0,30$ m ; $d'/d = 1,20 \therefore V_{cone,max} = 900$ kN

Pelas RPU tem-se : $\sigma_{ctd} = 0,16 * \sqrt{20} / 1,5 = 0,477$ kN/cm²

Rotura por Punçoamento

$\therefore V_{cone, max} = 4,50 * 0,0477 * \pi * (30 + 25) * 25 = 927 kN$; ou seja os valores agora obtidos são cerca de 3% inferiores aos que as RPU do CEB permitiam.

Seja $V_{Ed} = 900 kN$; a armadura horizontal de equilíbrio do cone de punçoamento é dada por ($\sigma_{sd} = 23 kN/cm^2$)

$\rho L = V_{Ed} / (4,7 * f * d * \sigma_{sd})$. Para $d'/d = 1,20$ e $d = 0,25m$ tem-se :

$f = 0,45m$; $b = 0,13m$; $\theta = 37^\circ$; $\rho L = 0,74\% < 0,8\%$ O.K.

$A_a = 25 * 0,74 = 18,5 cm^2 \rightarrow 9\phi 16 \#p.m.$; lado da malha quadrada:

$a = 2 * f + 2 * l_b * \sigma_{sd} / f_{syd} \approx 2 * (45 + 50 * 1,6 * 23/34) = 198 cm$

em que l_b é o comprimento de amarração, para um aço A400 e um betão B25 (armadura na face superior da laje).

Em lajes simetricamente apoiadas e solicitadas tem-se: $\rho L_x = \rho L_y = \rho L$

2.3. RESISTÊNCIA DE LAJES SEM ARMADURA TRANSVERSAL

Tal como na resistência ao esforço transversal, também nas zonas contíguas ao pilar de apoio o esquema estrutural da laje, em estado limite de rotura, é um esquema em treliça com bielas comprimidas em anel cónico e tirantes verticais em anel cilíndrico, elementos estes cujas secções resistentes crescem rapidamente à medida que a distância ao pilar aumenta.

A resistência ao Punçoamento é uma questão que interessa apenas à zona restrita em torno do pilar, pois para além desta zona a resistência da laje depende da capacidade resistente aos esforços de flexão, passando o esquema estrutural da laje em estado limite de rotura, a corresponder a um mecanismo em equilíbrio estático definido pelo esquema de linhas de rotura que origina um trabalho interno máximo de deformação.

No esquema em treliça a resistência da laje depende directamente da resistência $V_{Rd,c}$ do tirante vertical de betão, fig.2.7; esta resistência é dada pelo produto da secção do tirante pela respectiva tensão de cálculo.

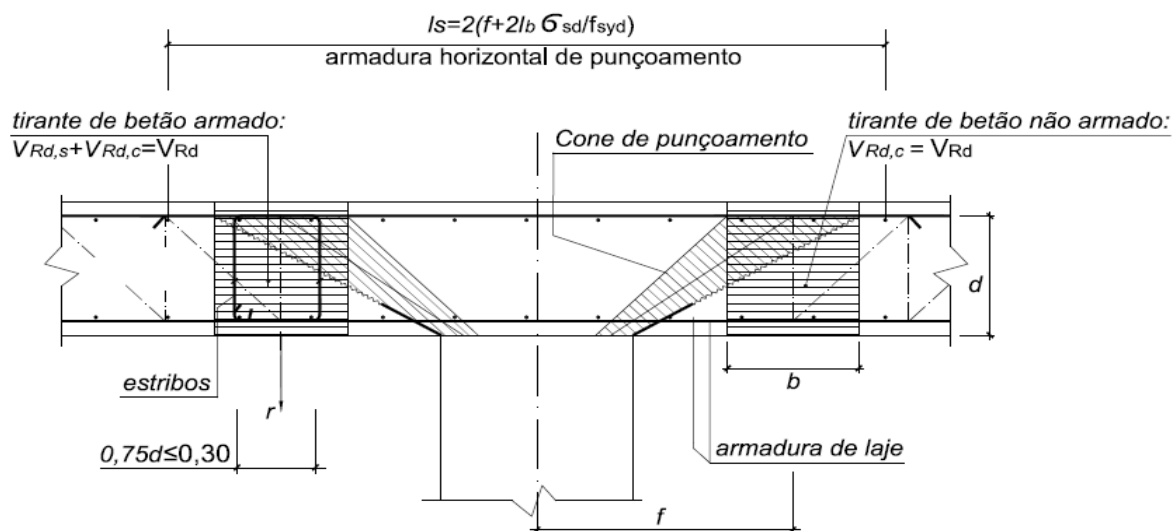


Fig.2.7 – Cone e tirante de Punçoamento; armaduras.

Como secção deste tirante considera-se a do anel cilíndrico directamente suspenso do cone do Punçoamento, dada por:

$$A_{ct} = (2 * \pi - w) * f * b$$

A tensão de cálculo tem expressão idêntica à que foi deduzida para o esforço transversal no esquema da viga em treliça devendo ser afectado do mesmo modo de um coeficiente η (cf. Esforço Transverso), com a diferença de que agora a largura do tirante não depende de z (no esforço transversal fazíamos $z=0,85*d$), nem de η^{IV} visto que no caso do Punçoamento a biela mais solicitada ser sempre a que arranca do apoio.

$$\eta = \eta^I * \eta^{II} * \eta^{III}$$

Os valores dos coeficientes (como no esforço transversal) são os seguintes:

$$\eta^I = 0,84$$

$$\eta^{II} = 0,65 \leq ((2,4 - 1,80 * d)/2,2)^3 \leq 1,0 \quad (d \text{ em metros})$$

$$\eta^{III} = 0,80$$

Sendo η^{III} 0.80 por influência dos momentos $m'r$ sempre existentes.

Sumariamente, pode portanto dizer-se que a resistência ao punçoamento de lajes sem armadura transversal é dada por:

$$V_{Rd,c} = (2 * \pi - w) * f * b * \eta * f_{ctd}$$



2.4. RESISTÊNCIA AO PUNÇOAMENTO DE LAJES COM ARMADURA TRANSVERSAL

Para cargas $V_{Ed} > V_{Rd,c}$ é necessário reforçar o tirante circular de betão, recorrendo-se à utilização de estribos verticais pois os estribos inclinados, além de execução difícil, não são tão eficientes como os verticais, em estado limite de rotura.

Em lajes armadas transversalmente, o valor de cálculo da resistência ao Punçoamento é dado por:

$$V_{Rd} = V_{Rd,s} + V_{Rd,c} \geq V_{Sd}$$

$$V_{Rd,s} = A_{sw} \cdot \sigma_{sd} \quad \text{e} \quad V_{Rd,c} = ((2 \cdot \pi \cdot w) \cdot f \cdot b - A_{cr}) \cdot \eta \cdot f_{ctd}$$

A_{sw} - Área total dos estribos verticais que formam a armadura transversal, colocados de forma simétrica em torno do pilar e segundo o perímetro $2 \cdot \pi \cdot f$ do cone de Punçoamento.

σ_{sd} - Tensão efectiva nos estribos. (Quadro 2.1)

A_{cr} - Área total de betão fissurada envolvente dos estribos:

$$A_{cr} = A_{sw} \cdot \frac{\sigma_{sd}}{f_{ctm}}$$

A existência de estribos origina a fissuração do betão na envolvente do varão tal como foi enunciado no estudo sobre o esforço transversal, daí ser descontada essa área à área do tirante. Para o Punçoamento também são fixadas regras relativas ao afastamento entre os estribos, colocados segundo um círculo de raio f , assim fixa-se $s < d < 0.30 \text{ m}$ (ver Fig. 2.6). Respeitando estas limitações pode desprezar-se a influência do ondulado do diagrama das tensões de tracção instaladas no tirante circular de betão, ou seja, os coeficientes η^I e η^{II} podem ser considerados iguais à unidade. Portanto quando se utiliza armadura transversal de punçoamento e se respeitam as disposições construtivas acima referidas, o valor de η que afecta a tensão admissível f_{ctd} é igual a η^{III} .

3

RESISTÊNCIA DE CÁLCULO AO PUNÇOAMENTO DE LAJES ASSIMETRICAMENTE APOIADAS

3.1. INFLUÊNCIA DE UM MOMENTO APLICADO NO CONE PUNÇOAMENTO

A existência de um momento M_{Ed} reduz a resistência do cone de Punçoamento, na medida em que localmente a compressão sobre este passa a ser maior do que a originada por uma carga N_{Ed} concêntrica com o eixo do pilar.

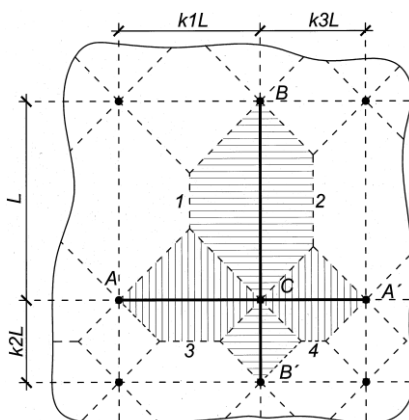


Fig.3.1 – A desigualdade dos vãos origina momentos M_{Ed} sobre o apoio C

Podemos obter o equilíbrio de M_{Ed} sobre o bordo do cone de Punçoamento a partir de uma reacção média, estendida a um comprimento $2d$, fig.3.2 e calcular a tensão linear instalada nos pontos A e A' localizados por:

$$f' = f * \cos\gamma, \text{ com } \gamma = d/2f$$

A variação média da reacção linear sobre o cone de Punçoamento, na extensão $2d$, é dada por:

Rotura por Punçoamento

$$\Delta r = M_{Ed} * f * \cos\gamma / (\pi * f^3) = M_{Ed} * \cos\gamma / (\pi * f^2)$$

em que $\pi * f^3$ é o momento de inércia da linha circular.

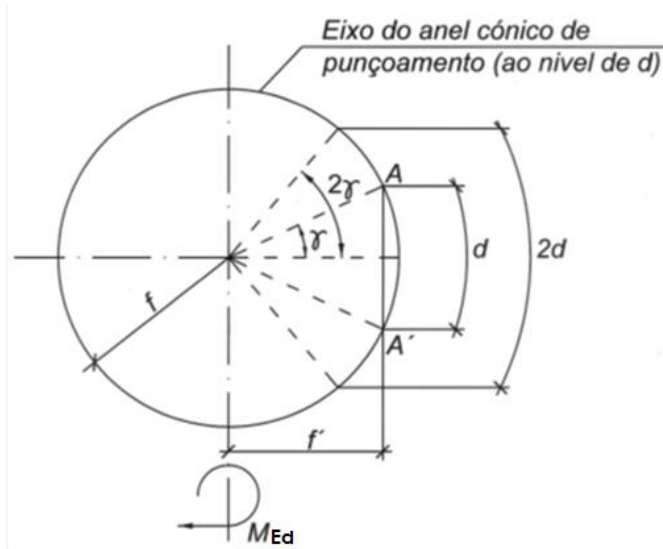


Fig.3.2 – Influência de M_{Ed} sobre a resistência do cone de Punçoamento

A variação Δr , embora se refira apenas à extensão $2d$, tem efeitos que devem ser estendidos a todo o perímetro e a nova carga admissível de punçoamento $V_{cone,máx,red}$ é dada por:

$$V_{cone,máx} = \left[\frac{V_{cone,máx,red}}{2 \cdot \pi \cdot f} + \frac{V_{cone,máx,red}}{\pi \cdot f^2} \cdot |e|_M \cdot \cos\gamma \right] \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$|e|_M = M_{Ed}/V_{Ed}$$

$$V_{cone,max} = V_{cone,máx,red} (1 + (2 * |e|_M * \cos\gamma)/f)$$

$$\eta_M = f/(f + (2 * |e|_M * \cos\gamma))$$

Para efeitos de cálculo tudo se passa como se o esforço V_{Ed} fosse substituído por um esforço equivalente dado por:

$$V_{Ed} \leq V_{cone,max} * \eta_M = V_{cone,max,red}$$

Ou ainda

$$V_{cone,max} \geq V'_{Ed} = V_{Ed}/\eta_M$$

será este valor V'_{Ed} que se deve comparar com V_{Rd} determinado nas alíneas 2.3 e 2.4.

$$V_{Rd} \geq V'_{Ed} = V_{Ed}/\eta_M$$

3.2. DISTRIBUIÇÃO DA ARMADURA HORIZONTAL PELAS DUAS FACES DA LAJE

A fig.3.3 permite concluir que a armadura total exigida pelo esforço de cálculo V'_{Ed} deve ser dividida pelas duas faces da laje e isto em consequência da acção dos momentos $M_{EdAA'}$ e $M_{EdBB'}$ situados nos planos de referência AA' e BB'.

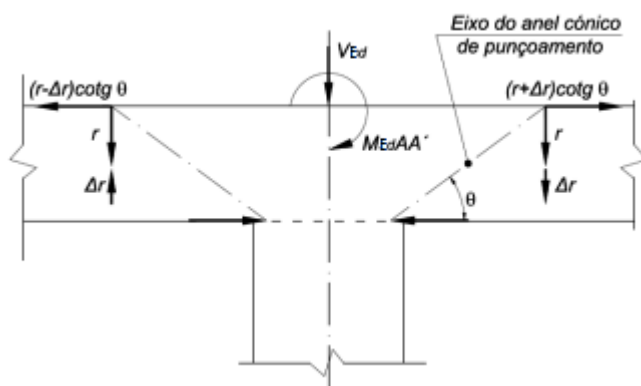


Fig.3.3 – Influência de $M_{EdAA'}$ (momento de cálculo no eixo AA') na resistência ao Punçãoamento

A acção desses momentos origina as excentricidades seguintes:

$$|e|_{MAA'} = M_{EdAA'}/V_{Ed}$$

$$|e|_{M_{BB'}} = M_{EdBB'}/V_{Ed}$$

$$|e|_M = \sqrt{(|e|_{MAA'})^2 + (|e|_{M_{BB'}})^2}$$

As excentricidades aumentam os esforços V_{Ed} a suportar pelo cone de punçãoamento:

$$V'_{EdAA'} = V_{Ed}/\eta'_{MAA'} \quad ;$$

$$V'_{EdBB'} = V_{Ed}/\eta'_{M_{BB'}}$$

em que se tem:

$$\eta'_{MAA'} = f/(f - (2 * |e|_{MAA'} * \cos\gamma))$$

$$\eta'_{M_{BB'}} = f/(f - (2 * |e|_{M_{BB'}} * \cos\gamma))$$

Rotura por Punçoamento

A armadura ρL_{sup} a aplicar na face superior, segundo a fig.2.2, será a necessária para resistir a $(r - \Delta r) * \cotan 36,5^\circ$ e é obtida a partir do valor seguinte:

$$V'Ed = (V'Ed_{AA'} + V'Ed_{BB'}) / 2)$$

distribuída segundo uma malha quadrada sobre o pilar.

Quanto à armadura a aplicar na face inferior da laje ela é dada por:

$$\rho L_{inf} = \rho L - \rho L_{sup}$$

em que ρL é definida para um esforço equivalente dado por:

$$V'Ed = VEd / \eta_M \text{ com } \eta_M = f / (f + (2 * |e|_M * \cos \gamma))$$

A armadura inferior destina-se a garantir o equilíbrio da biela mais solicitada na parcela de esforço não equilibrada, via armadura horizontal superior, com a biela menos solicitada.

Em relação à armadura transversal, o critério será o de considerar para cada uma das duas semi-zonas do tirante cilíndrico o maior dos valores seguintes, fig.3.4:

$$V'Ed_{AA'} = VEd / \eta_{MAA'} \text{ ou } V'Ed_{BB'} = VEd / \eta_{MBB'} \quad (\text{zona AB})$$

$$V'Ed_{AA'} = VEd / \eta'_{MAA'} \text{ ou } V'Ed_{BB'} = VEd / \eta'_{MBB'} \quad (\text{zona A'B'})$$

e adoptar o valor maior .

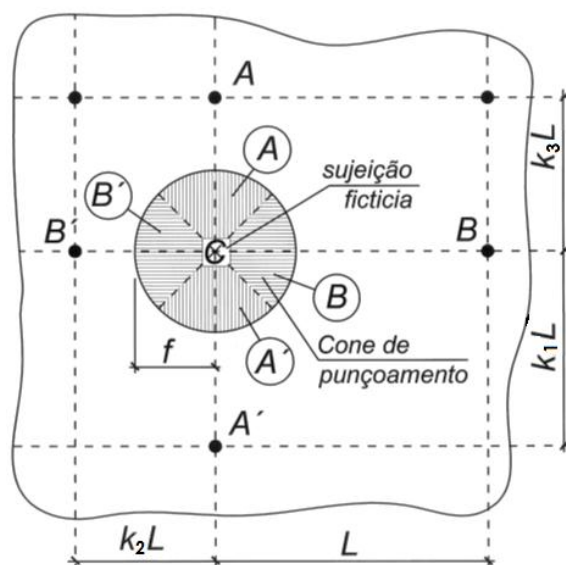


Fig.3.4 – Esquema de uma malha assimétrica de apoio, referente ao apoio C

3.3. REDUÇÃO DA RESISTÊNCIA $V_{cone\ max}$ DO CONE DE PUNÇOAMENTO DEVIDO À ASSIMETRIA DA MALHA DE APOIO DA LAJE

As lajes assimetricamente apoiadas e solicitadas por uma carga uniforme q originam uma reacção r não uniforme, o que reduz a resistência máxima $V_{cone\ max}$ do cone de Punçoamento, em cada um dos pilares considerados.

Para se aproveitar os resultados experimentais de Kinnunen-Nylander, tem-se de quantificar a redução da resistência ao Punçoamento resultante do desequilíbrio dos momentos de continuidade existentes sobre a cabeça do pilar, antes da formação dos mecanismos primários de rotura da laje, pois se está a admitir que a laje rompe por Punçoamento.

Em relação à carga de Kinnunen-Nylander definida a partir, como se disse, de um modelo equivalente ao de um pilar interior solicitado de forma simétrica, a questão que se põe é a de quantificar a redução imposta pelos desequilíbrios dos vãos contíguos, desequilíbrios estes que se traduzem em momentos inicialmente não equilibrados. Seja então o esquema da fig.3.4. O dispositivo da restrição à rotação aplicado sobre o pilar C permite a formação do modelo estrutural ensaiado, constituído por uma placa circular apoiada num pilar, formando-se a fenda de Punçoamento no quadrante circular contíguo ao vão maior, enquanto na zona oposta esta fenda não se chega a formar pois a laje está aí submetida a uma carga mais reduzida.

A aplicação de uma sujeição fictícia no pilar C impede a rotação do seu topo sob o efeito das solicitações assimétricas que as duas linhas de apoio AA' e BB' da laje lhe transmitem.

É evidente que nestas condições a resistência do cone de Punçoamento, formado sobre o pilar C, corresponde ao valor máximo fornecido pelo gráfico da fig.2.2.

Nesta situação, em qualquer dos sectores do cone de Punçoamento (zonas tracejadas A,B,A' e B' fig.3.4) desenvolve-se uma resistência $V_{Rd}/4$ porque os momentos de continuidade sobre o pilar C são iguais aos do encastramento perfeito, em qualquer das 4 direcções consideradas (ângulos de rotação da laje nulos).

Se libertarmos a sujeição no sentido AA', ela rodará sob a acção do momento de desequilíbrio de forma que os ângulos a um e outro lado deixem de ser nulos, para no caso desta figura, passarem a ser: $\alpha_{CA} > 0$ (descendente) e $\alpha_{CA'} < 0$; de igual modo se tem, para a linha BB', $\alpha_{CB} > 0$ e $\alpha_{CB'} < 0$.

Rotura por Punçoamento

Em relação aos quadrantes A' e B', como eles ficam submetidos a um sobre encastramento (ângulos negativos) a sua resistência ao Punçoamento mantem-se igual a $V_{Rd}/4$; porém nos quadrantes A e B existem acréscimos Δr da reacção de apoio da laje originados pelos momentos distribuídos, idênticos para efeitos de cálculo aos dos momentos M_{Sd} considerados na alínea 3.2.

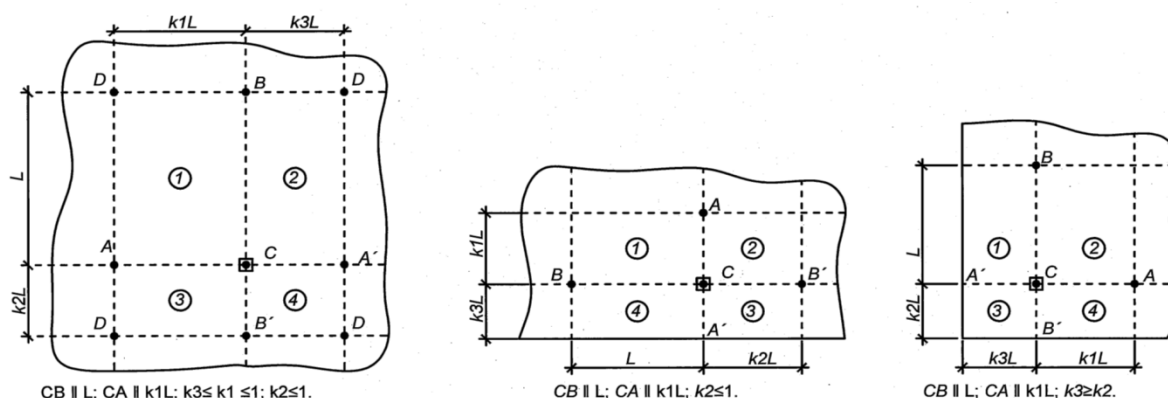


Fig.3.5 – Esquema auxiliares para a definição das expressões dos momentos M_{Sd} nos casos de se tratar de pilar interior (à esq.), de bordo (ao centro) ou de canto (à dir.).

Os momentos não equilibrados que actuam sobre a sujeição C da Figura 3.5 a podem ser dados por: $M_{AA'} = M_{CA_{1+3}} - M_{CA'_{2+4}}$; $M_{BB'} = M_{CB_{1+2}} - M_{CB'_{3+4}}$ (comportamento elástico). Na secção 4.7 definem-se as expressões para o cálculo destes momentos.

Quando se liberta a sujeição, os momentos não equilibrados segundo as linhas AA' e BB', distribuem-se pelos vãos contíguos e pelo pilar C, proporcionalmente às respectivas rigidezes. Do lado da segurança pode geralmente desprezar-se, em benefício da simplicidade, a influência da rigidez do pilar C.

Se se observar que as rigidezes relativas entre os vãos contíguos dependem apenas dos coeficientes K_1, K_2 e K_3 que caracterizam a malha a que o pilar em causa pertence, pois a largura da faixa da laje que a rigidez do pilar mobiliza não depende dos vãos, pode facilmente concluir-se que os momentos distribuídos são dados por (fig.3.5):

- Pilar interior:

$$M_{AA' dist} = M_{AA'} * (K_3 / (\beta' K_1 + K_3))$$

$$M_{BB' dist} = M_{BB'} * (K2/(\beta' + K2))$$

Quanto aos pilares de bordo e de canto vamos precisar de introduzir a rigidez Kp do pilar (superior e inferior) para se poder determinar o momento no pilar originado pelo desequilíbrio da laje.

- Pilar de bordo:

$$M_{AA' dist} = M_{AA'} * (K1/(i * Kp + \beta * n * k1))$$

$$M_{BB' dist} = M_{BB'} * (K2/(\beta' + K2))$$

- Pilar de canto:

$$M_{AA' dist} = M_{AA'} * (i * Kp/(i * Kp + \beta * n * k1))$$

$$M_{BB' dist} = M_{BB'} * (i * Kp/(i * Kp + \beta' * n * k1))$$

em que $i = I_l/I_p$

β' é um coeficiente que depende do grau de encastramento λ nos apoios A e B

$\beta' = 1$ para $\lambda = 1$; $\beta' = 0,75$ para $\lambda = 0$.

Como se disse, os pilares suportam parte dos momentos desequilibrados segundo as direcções AA' e BB'; quando considerados no cálculo do punçoamento eles são subtraídos aos correspondentes valores de $M_{AA'}$ e $M_{BB'}$ acima definidos.

O recurso a uma folha de cálculo permite calcular facilmente os momentos $M_{AA'}$ e $M_{BB'}$ a partir de expressões "rigorosas", desde que se respeitem os esquemas e seus condicionamentos apresentados na fig.3.5.

Por exemplo, em relação à fig.3.1 pode escrever-se:

$$M_{CA_{1+3}} = (0,625 * K1^3 + K2/K1 * (K1^3 - K2^2 * K1/2 + K1^3/8)) * l^3 * p/\beta_A$$

$$M_{CA'_{2+4}} = (0,625 * K3^3 + K2/K3 * (K3^3 - K2^2 * K3/2 + K2^3/8)) * l^3 * p/\beta_{A'}$$

$$M_{CB_{1+2}} = (K1 - K1^3/2 + K3/8 + K3 - K3^3/2 + K3^4/8) * l^3 * p/\beta_B$$

$$M_{CB'_{3+4}} = (1,35 * K2^3) * l^3 * p/\beta_{B'}$$

Rotura por Punçoamento

em que β é um coeficiente que considera o efeito do grau de encastramento da laje nos apoios A , A' , B e B' ; os valores devem estar compreendidos entre 24 e 16, valores estes que correspondem respectivamente, a rotação nula (idêntico a apoio interior de vãos contíguos iguais) e a rotação máxima (idêntico a apoio tangente a um bordo ou a um canto).

O valor da solicitação de cálculo V_{Ed} é expresso em função dos coeficientes K por:

$$\text{Pilar interior: } V_{Ed} = 0,25 * (1 + K2) * (K1 + K3) * l^2 * q_{Ed}$$

$$\text{Pilar de bordo: } V_{Ed} = (0,5 + 0,5 * K2) * (0,5 * K1 + K3) * l^2 * q_{Ed}$$

$$\text{Pilar de canto: } V_{Ed} = (0,5 + K3) * (0,5 + K2) * l^2 * q_{Ed}$$

em que q_{Ed} é a combinação de cálculo em estado limite último.

Observações:

a)- É grande a influencia que os valores de $\beta_A, \beta_{A'}, \beta_B, \beta_{B'}$ tem nos momentos de excentricidade; deve-se portanto na pratica definir estes valores de forma aproximada sim, mas do lado da segurança.

b)- É de referir a reduzida influência que os coeficientes β'_A, β'_B tem naqueles momentos, não sendo de grande importância o rigor com que são definidos.

c)- Os efeitos da assimetria sobre a redução de V_{Rd} são (num apoio interior) limitados a um valor que se situa á roda de um $\eta_M = 0,60$, isto é uma redução de resistência de cerca de 40%. Se se definir a assimetria de uma malha de apoio pelo coeficiente $\alpha = K2 * K3 / K1$, pode dizer-se que para valores de $\alpha = 0,4 * 0,6 / 0,86 = 0,28$ se tem ($l=10,0m$; $f=0,72m$; $\beta_A = 24$; $\beta_B = 24$) $\eta_M \approx 0,72$.

Para $\alpha = 0,6 * 0,3 / 1,0 = 0,18$ tem-se ($l=10,0m$; $f=0,72m$; $\beta_A = 24$; $\beta_B = 24$) $\eta_M \approx 0,71$

Para $\alpha = 0,6 * 0,3 / 1,0 = 0,18$ tem-se ($l=10,0m$; $f=0,72m$; $\beta_A = 16$; $\beta_B = 16$) $\eta_M \approx 0,62$

4

DIVERSOS TEMAS COMPLEMENTARES À TEORIA APRESENTADA

4.1. PUNÇOAMENTO EM LAJE DE FUNDAÇÃO (SAPATAS E ENSOLEIRAMENTO)

No essencial tudo se passa como o até agora definido para as lajes correntes atrás tratadas.

Na secção 2.1 referiu-se que o ângulo α , em estado limite último, depende essencialmente da percentagem ρ_L da armadura horizontal; verificou-se então que o valor máximo admissível de ρ_L (0,8%), quando associado à tensão σ_{sd} imposta pela fissuração admissível adoptada, conduzia a um ângulo $\alpha \approx 30^\circ$.

Se a armadura horizontal é apenas a armadura mínima, como geralmente sucede nas sapatas, a percentagem de armadura horizontal é muito inferior ($\rho_L \cong 0,2\%$) tendo então a inclinação do cone de punçoamento valores mais elevados ($\alpha \approx 45^\circ$ e $\theta \approx 51^\circ$).

Aliás a esse respeito o Code-Modele mencionava que para lajes de fundação se pode adoptar a mesma expressão das lajes correntes; por outro lado afirmava que se se adoptar uma percentagem ρ_L superior a 0,2% se pode obter uma margem de segurança suplementar que pode atingir os 50%.

De facto é fácil concluir-se do acima exposto que esta margem resulta da maior abertura do cone de punçoamento ($\alpha < 45^\circ$) permitida por percentagens $\rho_L > 0,2\%$, pois assim a área do tirante circular de betão é maior; para $\alpha = 30^\circ$ o acréscimo seria de $(tg30^\circ/tg45^\circ) = 58\% \approx 50\%$.

Rotura por Punçoamento

Por razões de deformabilidade as lajes de sapatas e ensoleiramentos são sempre muito mais espessas do que as lajes dos pavimentos. Em consequência disso, a percentagem ρ_L da armadura longitudinal de equilíbrio do cone de punçoamento é sempre muito inferior aos 0,8% habituais das lajes correntes.

Por outro lado não é habitual utilizar-se nas lajes de fundação armadura transversal de punçoamento, isto é, a resistência ao punçoamento destas lajes é limitada à do tirante circular em betão não armado. No entanto a utilização desta armadura permitirá um aumento substancial da resistência ao punçoamento destas lajes.

A resistência do cone de punçoamento $V_{cone\ max}$ de lajes de fundação só em casos muito especiais poderá ser condicionante. A resistência depende em geral da resistência do tirante cilíndrico. De facto quase sempre existe a possibilidade de se poder aumentar a espessura da sapata com o benefício da redução de ρ_L .

As solicitações que incluam, além do esforço axial de cálculo VEd , momentos de flexão segundo as linhas de referência AA' e BB', devem respeitar o definido na alínea 3.1.

Quanto às armaduras de punçoamento, elas serão definidas para um VEd_{eq} dado por:

$$VEd_{eq} = VEd / \eta_M - \pi * f^2 * \sigma_F$$

σ_F é a pressão do solo na vertical da coluna.

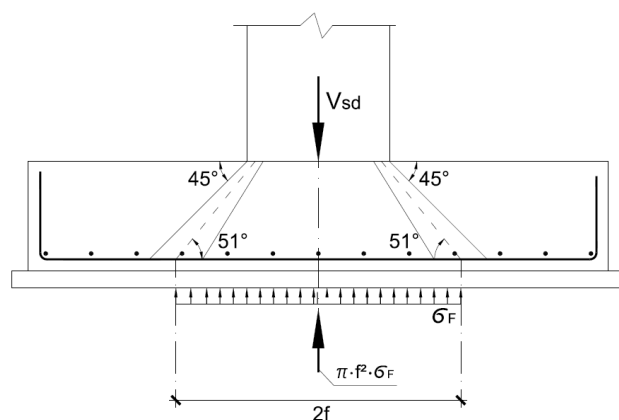


Fig.4.1 – Laje de fundação.

4.2. PUNÇOAMENTO DE LAJES SUBMETIDAS A CARGAS CONCENTRADAS

As cargas concentradas actuantes em qualquer dos quatro painéis devem ser consideradas em simultâneo com qualquer outro tipo de carga; a sua acção pode por isso ser favorável, quando reduz a excentricidade que as outras cargas originam e, pelo contrário, ela pode anular praticamente toda a resistência ao punçoamento.

Dado que a carga concentrada pode estar aplicada em qualquer dos painéis interiores, o critério a adoptar é o de se definirem os momentos MAA' e MBB' que elas originam e juntar estes momentos aos originados pelas outras cargas.

4.3. PUNÇOAMENTO DE LAJES SUBMETIDAS A ACÇÕES TRANSVERSAIS

Em estruturas formadas por lajes e pilares submetidas a acções transversais, para além dos momentos devidos à assimetria da malha de apoio e às cargas verticais, as lajes estão submetidas a momentos MAA, e MBB, orientados segundo as linhas de apoio.

Em geral as estruturas formadas por lajes apoiadas em pilares possuem elementos estruturais que suportam as acções transversais e por isso o cálculo da influência destas acções sobre a resistência ao Punçoamento das lajes não é muitas vezes necessário.

O cálculo dos momentos MAA, e MBB, para efeitos de Punçoamento, pode ser feito com a aproximação suficiente à custa da localização dos pontos de inflexão das deformadas dos elementos em causa (pilar e vigas na laje, segundo as linhas AA' e BB').

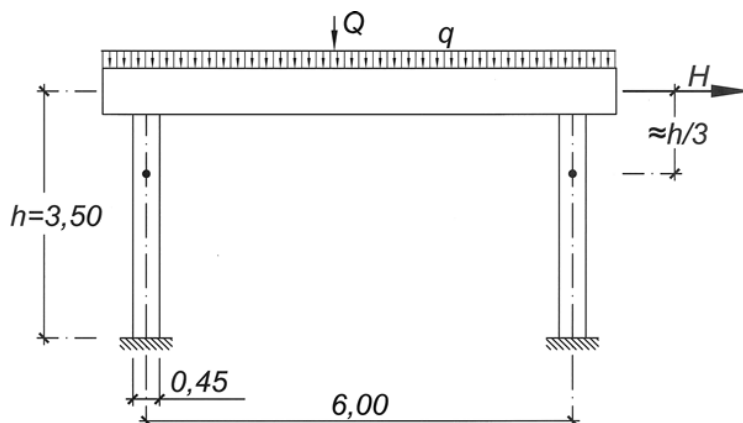


Fig.4.2 – Esquema de estrutura solicitada por acções horizontais.

4.4. LAJES COM ABERTURAS PRÓXIMAS DO APOIO

Todas as aberturas devem ser reduzidas ao círculo de raio f (correspondente ao perímetro do cone de punçoamento (referido em 2.1)), recorrendo-se para o efeito ao ângulo ao centro 2α segundo o qual elas são vistas a partir do eixo do pilar.

Há que definir a maior dimensão l_i na direcção tangencial ao pilar, que contenha em si toda a abertura, e a distância f_i de l_i ao centro do pilar, medido na normal a l_i , figura 4.3.

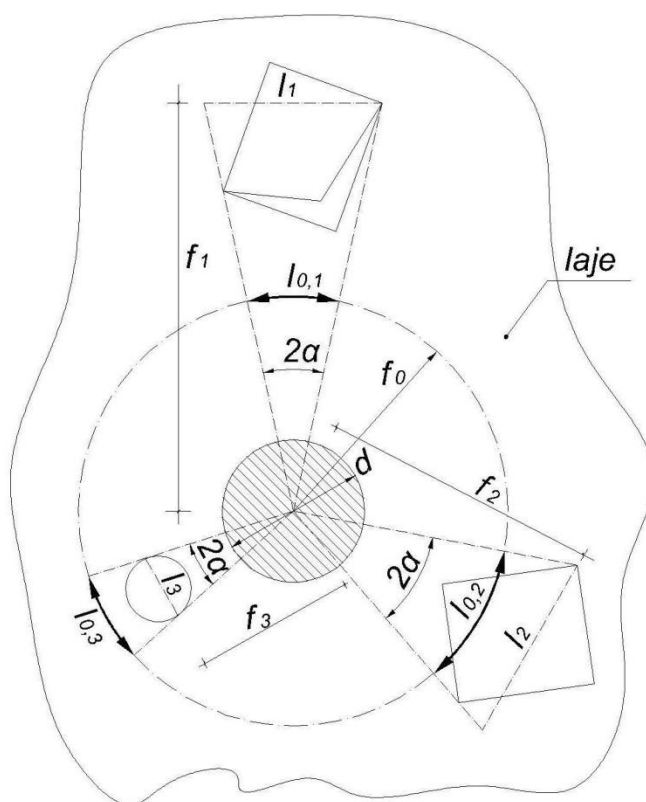


Fig.4.3 – Esquema de laje com aberturas próximas do pilar.

$$l_{0,i} = 2 * \alpha * f_0$$

com o ângulo α definido por

$$\operatorname{tg} \alpha = l_i / (2 * f_i) .$$

Assim o coeficiente de redução η é dado por:

$$\eta_A = 1 - l_i / (2 * \pi * f_0) = 1 - \alpha / \pi$$

Observa-se que o coeficiente de redução η_A é essencialmente distinto dos originados pelas solicitações, pois ele representa uma perda da secção resistente do cone de Punçoamento.

É portanto um coeficiente cuja influência se faz sentir sobre a carga axial reduzida $V_{cone\ maxred}$, isto é, sobre a resultante das cargas verticais já afectada pelo coeficiente de redução.

Como se viu em 3.1

$$V_{Ed} \leq V_{cone\ max} * \eta_M = V_{cone\ max\ red}$$

e existindo aberturas na laje

$$V_{Ed} \leq V_{cone\ max} * \eta_M * \eta_A = V_{cone\ max\ red}$$

Do mesmo modo η_A afecta o valor da resistência do tirante circular

$$V'_{Ed} = V_{Ed} / \eta_M / \eta_A$$

que se deve comparar com V_{Rd} determinado nas alíneas 2.3 e 2.4

$$V_{Rd} \geq V'_{Ed} = V_{Ed} / \eta_M / \eta_A$$

A existência de mais do que uma abertura em torno do pilar, origina um coeficiente de redução η_{Afinal} correspondente ao somatório do conjunto dos η_A individuais originados por cada uma das aberturas:

$$\eta_{Afinal} = 1 - \sum \alpha_i / \pi$$

Exemplos :

Seja $d = 0,25m$; $d' = 0,30m$. . . $f = 0,46m$.

1º Exemplo :

$$l_1 = 0,24m \quad f_1 = 0,52m$$

$$tg\alpha = l_1/(2 * f_1) = 0,24/(2 * 0,52) \quad \therefore \alpha = 0,226 rad$$

$$\eta_A = 1 - \alpha/\pi = 0,93$$

2º Exemplo:

$$l_2 = 0,22m; \quad f_2 = 0,15m \quad (\text{abertura encostada ao pilar})$$

$$\alpha = 0,633 rad \quad \therefore \eta = 0,80$$

4.5. DIÂMETRO DO PILAR CILÍNDRICO EQUIVALENTE

Em secções rectangulares, Fig.4.5, podemos usar a expressão:

$$d_{eq} \approx (2(a + b))/\pi$$

desde que seja $a < 1,5 * b$

Na figura 4.6 é apresentado o caso $a > 1,5*b$ em que a resistência é a soma da resistência ao punçoamento da laje nos extremos dos pilares ou paredes e da resistência ao esforço transversal da laje no restante.

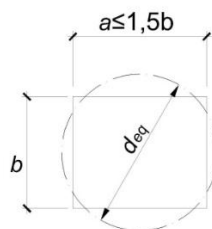


Fig.4.5 – Diâmetro equivalente.

Rotura por Punçoamento

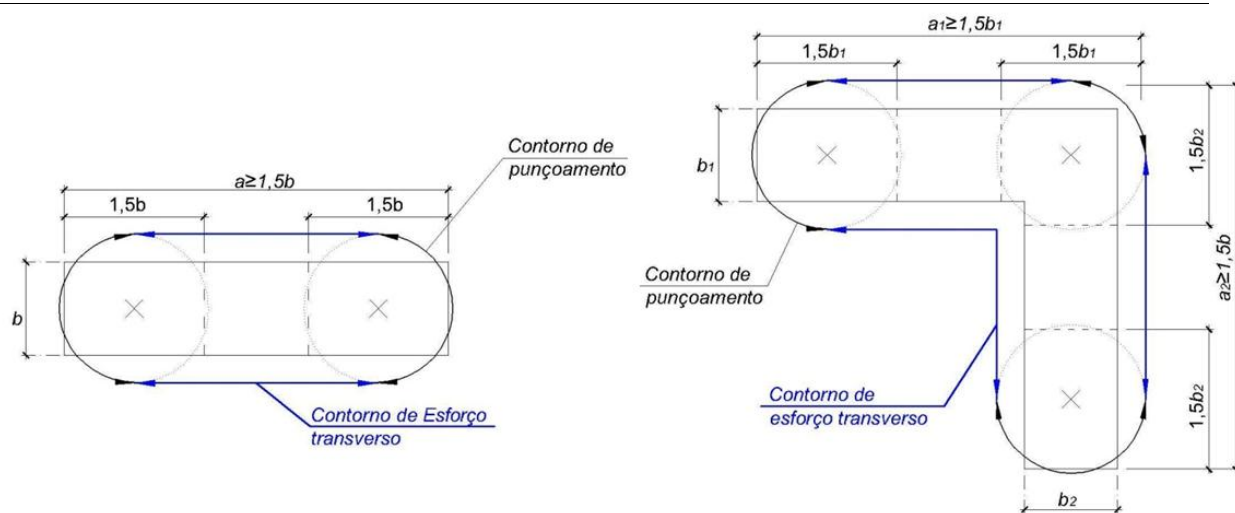


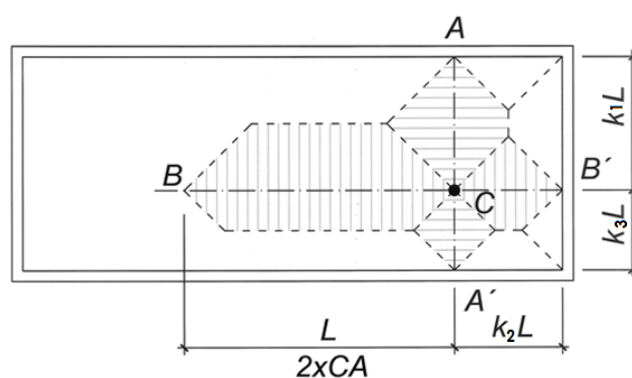
Fig.4.6 – Distinção de zona de punçoamento e de esforço transversal em parede.

4.6. MALHAS DE APOIO; SUA DEFINIÇÃO

A aplicação do método de cálculo proposto na alínea 3.3 é simples, pois apenas é necessário definir-se os coeficientes K_1 , K_2 e K_3 , e os graus de encastramento existentes nos apoios A,A' e B,B'.

No entanto existem situações que poderão levantar dúvidas quanto à definição dos esquemas das malhas que se devem considerar para cada pilar C em causa.

A fig. 4.7 representa um caso frequente na prática, em que se tem de decidir sobre o comprimento a adoptar na viga CB. Temos verificado que a relação de vãos que origina um maior momento distribuído é de ≈ 2 para 1 entre o vão CB e o maior dos outros três. Esta relação também dá valores bastante corretos para VEd .



Nota: r representa pilares fictícios

Fig.4.7 – Exemplo de definição de malhas de apoio, para cálculo dos momentos $M_{SdAA'}$ e $M_{SdBB'}$

Quanto às cargas efectivas sobre cada pilar, ou seja os esforços VSd de cálculo, elas deverão ser verificadas segundo critérios apropriados, nada tendo a ver com a definição das malhas, que se destina apenas a obter os coeficientes η_M não se aplicando portanto, nestes casos de apoios fictícios as expressões indicadas na alínea 3.3, a não ser que se escolham valores de l , K_1 , K_2 e K_3 que forneçam valores de VEd idênticos aos efectivos.

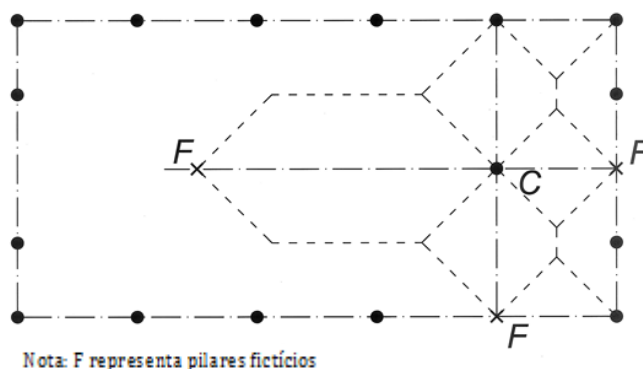


Fig.4.8 – Exemplo de definição de malhas com recurso a apoios fictícios, para cálculo dos momentos $M_{SdAA'}$ e $M_{SdBB'}$

Vemos na fig. 4.8 que em certos casos, teremos de imaginar pilares fictícios localizados de acordo com as condições envolventes.

4.7. EXPRESSÕES PARA A DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS NÃO EQUILIBRADOS (OU DISTRIBUÍDOS)

Na alínea 3.3 referiu-se a possibilidade de recurso a uma folha de cálculo. Seguem-se as expressões para determinação dos momentos não equilibrados (ou distribuídos).

$$N1 = K2/K1 \quad ; \quad N2 = K3/K1$$

$$L1 = N1 - 0,5 * N1^3 + 0,125 * N1^4$$

$$L2 = N2^3$$

$$L3 = N1^3$$

$$L4 = N1^2 - 0,5 * N2^3 + 0,125 * N2^4 / N1$$

$$L5 = N1^2 - 0,5 + 0,125 / N1$$

$$L6 = N1 * N2^2 - 0,5 * N1^3 + 0,125 * N1^4 / N2$$

$$L7 = 1 / K1^2 - 0,5 + 0,125 * K1$$

$$L8 = N2 / K1^2 - 0,5 * N2^3 + 0,125 * N2^4 * K1$$

Rotura por Punçoamento

$$L9 = 2 * N2 * N1^2 - 4 * N2^3 + 2 * N2^4 / N1$$

$$L10 = 2 * N2 / K1^2 - 4 * N2^3 + 2 * N2^4 * K1$$

$$L11 = N1^3 + 6 * N2^2 * N1 - 1.5 * N1^3$$

$$L12 = 1 / K1^3 + 6 * N2^2 / K1 - 1.5 / K1^3$$

$$L13 = 0$$

$$L14 = 1 / K1 - 0,5 / K1^3 + 0,125 / K1^4$$

$$L15 = L12$$

$$L16 = N1^3 + 6 * N2^2 * N1 - 1.5 * N1^3$$

$$L17 = 2 * N2^2 / K1 - 4 * N2^3 + N2^4 * K1$$

$$L18 = N2^3 + 6 * N1^2 * N2 - 1.5 * N2^3$$

$$L19 = 2 * N1 - 4 * N1^3 + 2 * N1^4$$

$$L20 = 1 + 6 * N1^2 - 1.5$$

Pilar interior T1

$$VSd = 1,5 * (0,25 * (1 + k2) * (k1 + k3) * l^2 * p)$$

$$K1 \leq 1$$

$$M_{CA1} = 0,625 ; M_{CB1} = L7$$

$$K3 \leq 1$$

$$M_{CA2} = 0.625 * L2 ; M_{CB2} = L8$$

$$K1 \geq K2$$

$$M_{CA3} = L1 ; M_{CB3} = 0.625 * L3$$

$$K1 < K2$$

$$M_{CA3} = 0.625 ; M_{CB3} = L5$$



$$K2 \geq K3$$

$$M_{CA4} = 0.625 * L2 ; M_{CB4} = L4$$

$$K2 < K3$$

$$M_{CA4} = L6 ; M_{CB4} = 0.625 * L3$$

$$M_{CCA1} = (M_{CA1} + M_{CA3}) * K1^3 * l^3 / \beta_A \quad ; \quad M_{CCA2} = (M_{CA2} + M_{CA4}) * K1^3 * l^3 / \beta_{A'}$$

$$M_{CCB1} = (M_{CB1} + M_{CB2}) * K1^3 * l^3 / \beta_B \quad ; \quad M_{CCB2} = (M_{CB3} + M_{CB4}) * K1^3 * l^3 / \beta_{B'}$$

$$M_{AA} = (M_{CCA1} - M_{CCA2}) \quad ; \quad M_{BB} = (M_{CCB1} - M_{CCB2})$$

$$M_{AAD} = M_{AA} * (K3 / (\beta'_A * K1 + K3)) + MPiA/p \quad M_{BBD} = M_{BB} * (K2 / (\beta'_B + K2)) + MPiB/p$$

Pilar de bordo T2

$$Vsd = 1,5 * ((0,5 + 0,5 * K2) * (0,5 * K1 + K3) * l^2 * p)$$

$$K1 \leq 1$$

$$M_{CA1} = 0.625 ; M_{CB1} = L7$$

$$K1 > 1$$

$$M_{CA1} = L14 ; M_{CB1} = 0.625 / k1^3$$

$$K1 \geq K2$$

$$M_{CA2} = L1 ; M_{CB2} = 0.625 * L3$$

$$K1 < K2$$

$$M_{CA2} = 0.625 ; M_{CB2} = L5$$

Rotura por Punçoamento

$$K2 \geq 0.5 * K3$$

$$M_{CA3} = 0.625 * L3 ; M_{CB3} = L11$$

$$K2 < 0.5 * K3$$

$$M_{CA3} = L9 ; M_{CB3} = 8 * L2$$

$$K3 \geq 0.5$$

$$M_{CA4} = 0.625 / k1^3 ; M_{CB4} = L12$$

$$K3 < 0.5$$

$$M_{CA4} = L10 ; M_{CB4} = 8 * L2$$

$$M_{CCA1} = (M_{CA1} + M_{CA3}) * K1^3 * l^3 / \beta_A \quad ; \quad M_{CCA2} = (M_{CA2} + M_{CA4}) * K1^3 * l^3 / \beta_A'$$

$$M_{CCB1} = (M_{CB1} + M_{CB2}) * K1^3 * l^3 / \beta_B \quad ; \quad M_{CCB2} = (M_{CB3} + M_{CB4}) * K1^3 * l^3 / \beta_B'$$

$$M_{AA} = (M_{CCA1} - M_{CCA2}) \quad ; \quad M_{BB} = (M_{CCB1} - M_{CCB2})$$

$$M_{AAD} = M_{AA} * (K1 / (i * Kp + K1)) + MPiA / p$$

$$M_{BBD} = M_{BB} * (K2 / (\beta'_B + K2)) + MPiB / p$$

$$i = I_l / I_p$$

Pilar de canto T3

$$VSd = 1,5 * ((0,5 + K2) * (0,5 * K1 + K3) * l^2 * p)$$

$$K3 \leq 0.5$$

$$M_{CA1} = 8 * L2 ; M_{CB1} = L17$$



Rotura por Punçoamento

$$K3 > 0.5$$

$$M_{CA1} = L15 ; M_{CB1} = 0.625/k1^3$$

$$K1 \geq 1$$

$$M_{CA2} = L14 ; M_{CB2} = 0.625/k1^3$$

$$K1 < 1$$

$$M_{CA2} = 0.625 ; M_{CB2} = L7$$

$$K2 \geq 0.5 * K1$$

$$M_{CA3} = 0.625 ; M_{CB3} = L20$$

$$K2 < 0.5 * K1$$

$$M_{CA3} = L19 ; M_{CB3} = 8 * L3$$

$$K2 \geq K3$$

$$M_{CA4} = 8 * L2 ; M_{CB4} = L18$$

$$K2 < K3$$

$$M_{CA4} = L16 ; M_{CB4} = 8 * L3$$

$$M_{CCA1} = (M_{CA1} + M_{CA3}) * K1^3 * l^3 / \beta_A \quad ; \quad M_{CCA2} = (M_{CA2} + M_{CA4}) * K1^3 * l^3 / \beta_A$$

$$M_{CCB1} = (M_{CB1} + M_{CB2}) * K1^3 * l^3 / \beta_B \quad ; \quad M_{CCB2} = (M_{CB3} + M_{CB4}) * K1^3 * l^3 / \beta_B$$

$$M_{AA} = (M_{CCA1} - M_{CCA2}) \quad ; \quad M_{BB} = (M_{CCB1} - M_{CCB2})$$

$$M_{AAD} = M_{AA} * (K1 / (i * Kp + K1)) + MPiA / p$$

$$M_{BBD} = M_{BB} * (1 / (i * Kp + 1)) + MPiB / p$$

$$i = Il / Ip$$

4.8. COMPARAÇÃO COM A ACTUAL REGULAMENTAÇÃO

4.8.1. CONFRONTO DAS CONCLUSÕES DA ALÍNEA 2.3. COM AS RPU (KINNUNEN E NYLANDER)

Como na alínea 2.1 se disse, o CEB definiu através das suas RPU a resistência ao punçoamento de lajes simetricamente apoiadas, em função da raiz quadrada da tensão característica do betão, baseando-se para o efeito nos estudos e ensaios realizados por Kinnunen e Nylander.

Foi então definida uma resistência ao punçoamento, expressa em função da estabilidade elástica da casca cónica triaxialmente comprimida que, formando a base de apoio do cone de punçoamento, transmite a carga da laje ao contorno exterior do topo do pilar de apoio. Assim se compreende por que razão a resistência V_{Rd} é expressa na teoria de Nylander em função de $\sqrt{f_{ck}}$, pois se considera existir um problema de instabilidade elástica e não de rotura.

Pode portanto concluir-se que a regulamentação imposta nas RPU se baseia na resistência do anel cónico de betão e na da sua armadura horizontal; é esta armadura que garante, à custa da limitação da sua deformação radial, a estabilidade deste anel.

Actualmente no seu Code-Modele o CEB define uma resistência ao Punçoamento V_{Rd1} , para lajes sem armadura transversal, directamente proporcional à resistência do betão (e não à raiz quadrada desta) e outra V_{Rd2} igual a 1,6 vezes aquela, para lajes reforçadas com armadura transversal.

É evidente portanto que V_{Rd1} se refere a uma resistência diferente da definida pelas RPU. De facto, enquanto esta representa a resistência V_{Rd} do cone de Punçoamento, V_{Rd1} representa a resistência unitária do tirante cilíndrico que suspende a laje daquele cone.

É perfeitamente correto, portanto, que se compare o valor de $V_{Rd,c}$ da teoria aqui exposta, com o obtido a partir de V_{Rd1} , pois ambas estas resistências se referem ao mesmo elemento estrutural.

Assim considere-se por exemplo: $d'/d = 1,5$; $d = 0,30m$. Pode escrever-se:

$$f = 2,05 * d \text{ , } b = 0,86 * d \therefore V_{Rd,c} = 11,09 * d^2 * \eta * f_{ctd}$$

Para o Code-Modele tem-se ($\rho_L = 0,8\%$) :

$$\begin{aligned} V_{Rd1} &= 1,60 * (1,60 - 0,30) * (1 + 50 * 0,8\%) * d * 0,255 f_{ctd} * (d' + d) \\ &= 5,82 * d^2 * f_{ctd} \end{aligned}$$

Rotura por Punçoamento

Observa-se no entanto que a resistência V_{Rd1} já está afectada pelo efeito que a assimetria da malha de apoio da laje origina; este efeito pode ser avaliado, numa redução de 30%. Assim, para efeitos de comparação com $V_{Rd,c}$, ter-se-á de afectar V_{Rd1} pelo coeficiente 1,30 :

$$V_{Rd1} = 7,5 * d^2 * f_{ctd} \quad \text{logo} \quad \eta = V_{Rd1}/V_{Rd,c} = 0,67$$

O coeficiente 1,30 corresponde a uma assimetria para a qual se tem $l_a/l_o \approx 0,75$ e por isso pode escrever-se:

$$\eta^I = 0,84 \quad ; \quad \eta^{II} = ((2.4 - 0.30)/2.2)^3 = 0,75 \quad ; \quad \eta^{III} = 0,80 * (5 - 0.75)/4 = 1,06$$

$$\text{logo} \quad \eta = \eta^I * \eta^{II} * \eta^{III} = 0,67$$

Pode concluir-se portanto que a existência do tirante circular do betão, base desta teoria de rotura, é confirmada pela actual regulamentação.

4.8.2. REBAP

No que diz respeito ao corte por punçoamento o cálculo da força resistente é feito por:

$$V_{Rd} = v_{Rd} \cdot u$$

$$v_{Rd} = (1.6 - d) \cdot \tau_1 \cdot d$$

em que u é a superfície crítica que envolve o pilar definindo um perímetro a uma distância mínima $0.5d$ do bordo do pilar. Neste caso V_{Rd} é expresso em kN/m.

Esta metodologia apenas é aplicável em casos em que a zona em causa não esteja a uma distância inferior a $5d$ de um bordo livre.

O valor de cálculo da tensão actuante, v_{Sd} , em carregamentos sem excentricidade é dado por:

$$v_{Sd} = \frac{V_{Sd}}{u}$$

Se o carregamento for excêntrico a tensão actuante é, para pilares rectangulares e circulares, respectivamente:

Rotura por Punçoamento

$$v_{sd} = \frac{V_{sd}}{u} \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \frac{e_x + e_y}{\sqrt{b_x \cdot b_y}} \right)$$

$$v_{sd} = \frac{V_{sd}}{u} \cdot \left(1 + \frac{2e}{d_0} \right)$$

Em que e_x e e_y são o módulo das excentricidades segundo as duas direcções, b_x e b_y são as dimensões do contorno crítico e d_0 corresponde ao diâmetro do pilar.

No caso de ser necessária armadura de punçoamento, esta é calculada a partir $V_{Rd,f}$ determinada por:

$$V_{Rd,f} = \frac{4}{3} A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \sin \alpha$$

Este valor não deve ser superior a $1.6V_{Rd}$ segundo este regulamento.

Quanto às disposições construtivas o REBAP especifica que a armadura de punçoamento deve ser disposta entre um perímetro mínimo de $0,5d$ e um perímetro exterior a esse situado à distância de $1,5d$. O espaçamento entre varões não deve ser superior a $0.75d$.

4.8.3. EC2

No Eurocódigo a verificação da segurança deve ser feita em 3 perímetros de controlo, sendo o primeiro à face do pilar (para verificar $V_{Rd,max}$), o segundo à distância $2d$ do pilar (para verificar a necessidade de reforçar a laje) e um terceiro perímetro que dista $1,5d$ do último perímetro reforçado (caso seja necessário o reforço).

A tensão provocada pelas acções actuantes, v_{Ed} , pode ser calculada por:

$$v_{Ed} = \beta \cdot \frac{V_{Ed}}{u_i \cdot d}$$

em que β é o coeficiente que tem em conta a excentricidade do carregamento. De forma simplificada pode-se considerar este coeficiente 1.5 para pilares de canto, 1.4 para pilares de

Rotura por Punçoamento

bordo e 1.15 para pilares interiores, caso o comprimento dos vãos dos tramos adjacentes não ultrapasse 25%.

Em pilares interiores e com excentricidade numa direcção, β é dado por:

$$\beta = 1 + k \cdot \frac{M_{Ed}}{V_{sd}} \cdot \frac{u_1}{W_1}$$

k é um coeficiente que depende das dimensões do pilar e W corresponde à distribuição de tensões tangenciais e os seus valores podem ser consultados na secção 6.4.3. do EC2.

A tensão resistente ao punçoamento sem armadura, $v_{Rd,c}$, em lajes é dada por:

$$v_{Rd,c} = 0.12 \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} \leq v_{\min}$$

$$v_{\min} = 0.035 \cdot k^{1.5} \cdot f_{ck}^{0.5}$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}}$$

Em que ρ_l é a percentagem de armadura longitudinal e não deve ser superior a 0.02.

A resistência ao punçoamento de lajes e sapatas com a respectiva armadura de punçoamento é dada por:

$$v_{Rd,cs} = 0.75 \cdot v_{Rd,c} + 1.5 \cdot d \cdot \frac{A_{sw}}{s_r} f_{ywd,ef} \left(\frac{1}{u_1 \cdot d} \right) \cdot \sin \alpha$$

$$f_{ywd,ef} = 250 + 0.25d \leq f_{ywd}$$

Em que A_{sw} é a área de um perímetro de armaduras de punçoamento em torno do pilar, s_r é o espaçamento radial dos perímetros de armaduras de punçoamento, $f_{ywd,ef}$ é o valor de cálculo da tensão efectiva de cedência das armaduras e α é o ângulo entre as armaduras de punçoamento e o plano da laje. Dispondo armadura de punçoamento o seu perímetro exterior medido à distância de $1.5d$ do último perímetro de reforço não deve ser inferior a $\frac{\beta \cdot V_{Ed}}{v_{Rd,c} d}$.

O Eurocódigo estabelece também a verificação ao corte de um perímetro de controlo à face do pilar. A tensão actuante neste perímetro nunca deverá ser maior que:

$$v_{Rd,max} = 0.3 \cdot \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] \cdot f_{cd}$$

Quanto às disposições construtivas relativamente ao punçoamento este código impõe como limites a dispersão de armadura a $1.5d$ tal como no REBAP e um espaçamento longitudinal também igual ao regulamento referido. Na Figura A.9 o valor de k recomendado é de 1.5.

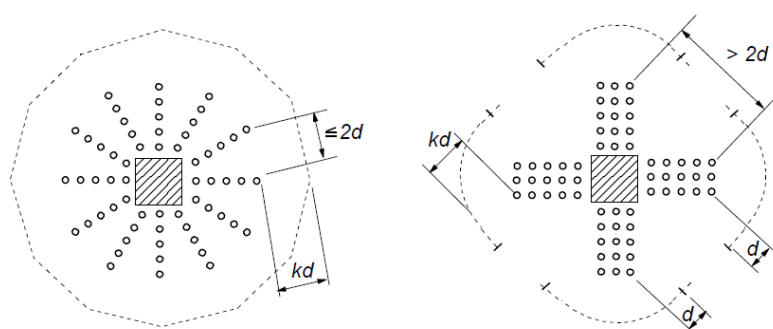


Figura A.10 – Disposições da armadura de Punçoamento segundo o EC2

4.8.4. ACI

Quanto ao punçoamento, o ACI 318 fixa o valor de V_c o valor mínimo dado entre as equações abaixo apresentadas:

$$V_c = 0.17 \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) \sqrt{f_{ck}} b_0 d$$

$$V_c = 0.083 \left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_0} \right) \sqrt{f_{ck}} b_0 d$$

$$V_c = 0.33 \sqrt{f_{ck}} b_0 d$$

Nestas expressões β corresponde ao quociente entre o lado maior do pilar e o lado menor, b_0 é o perímetro crítico que se situa a uma distância de $0.5d$ do pilar e α_s é um coeficiente que tem em conta a localização do pilar na laje sendo 40 em pilares interiores, 30 em pilares de bordo e 20 em pilares de canto.

Rotura por Punçoamento

Em carregamentos excêntricos o momento a considerar no pilar consiste no momento proveniente da laje multiplicado por um coeficiente γ_v dado pela expressão:

$$\gamma_v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}}$$

em que b_1 e b_2 correspondem às dimensões dos lados do perímetro de controlo. De seguida é possível calcular as tensões actantes no cone de punçoamento pelas equações:

$$v_{u1} = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\gamma_v M_u c}{j}$$

$$v_{u2} = \frac{V_u}{A_c} - \frac{\gamma_v M_u c'}{j}$$

Os valores de c/j podem ser calculados através do método proposto no ponto R.11.11.7.2 do ACI 318.

No caso de ser necessário reforçar a laje com armadura de punçoamento, V_s não deve ser inferior a $0.17 \sqrt{f_{ck}} b_0 d$, V_{Rd} tem que ser inferior a $0.5 \sqrt{f_{ck}} b_0 d$ e V_s é calculado pela equação

$$V_s = \frac{A_v}{s} \cdot f_{ywd} \cdot \sin \alpha$$

Neste caso A_v corresponde à área de estribos que é necessário colocar em cada perímetro de controlo.

4.8.5. MC10

O MC10 define que o perímetro de controlo a partir do qual se determina a força de corte actuante dista da face do pilar $0.5d$. Em paredes o perímetro não se deve alongar mais do que $1.5d$ a contar a partir do cunhal (Figura A.10) e no total o perímetro de controlo não deve exceder $12d$. Em zonas com aberturas a uma distância menor ou igual a $5d$ do pilar não deve ser considerada a parte do perímetro de controlo entre as duas tangentes à abertura traçadas desde o centro da área carregada.

Rotura por Punçoamento

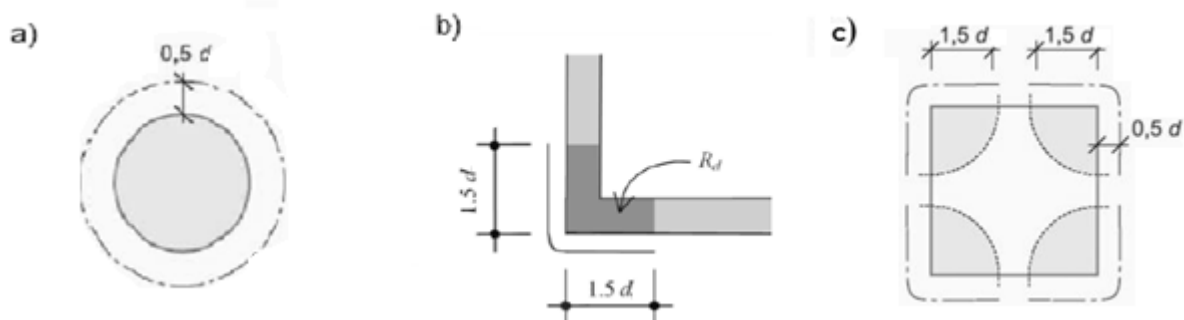


Figura A.11 – Exemplos de perímetros de controlo em: a) pilar; b) parede; c) limites

A contribuição do betão na resistência pode ser obtida pelas seguintes expressões:

$$V_{Rd,c} = k_{\psi} \cdot \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} d \cdot b_0$$

$$k_{\psi} = \frac{1}{1.5 + 0.6 \cdot \psi \cdot d \cdot k_{dg}} \leq 0.6$$

$$k_{dg} = \frac{48}{16 + d_g}$$

ψ é o parâmetro que define a rotação da laje e pode ser definido consoante o nível de rigor pretendido. O cálculo da rotação da laje para o nível I é feito de acordo com uma análise linear elástica sem uma redistribuição de esforços, e é dada por:

$$\psi = 1.5 \frac{r_s}{d} \frac{f_{yd}}{E_s}$$

O nível II de aproximação é recomendável quando se pretende fazer uma redistribuição de momentos e a sua rotação é dada por:

$$\psi = 1.5 \frac{r_s}{d} \frac{f_{yd}}{E_s} \left(\frac{m_{sd}}{m_{Rd}} \right)^{1.5}$$

A força de cálculo da contribuição da armadura transversal é dada por:

$$V_{Rd,s} = \sum A_{sw} \cdot k_e \cdot \sigma_{sd} \cdot \sin \alpha$$

$\sum A_{sw}$ corresponde à área de estribos necessária situada entre $0.35d$ e d e σ_{sd} é dado por:

$$\sigma_{sd} = \frac{E_s \cdot \psi}{6} \leq f_{ywd}$$

O limite superior imposto pelo MC10 pode ser calculado através da seguinte equação:

$$V_{Rd,max} = k_{sys} \cdot k_{\psi} \cdot \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} \cdot b_0 \cdot d \leq \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} \cdot b_0 \cdot d$$

O coeficiente k_{sys} toma o valor de 2, neste regulamento, no entanto investigações recentes permitiram definir esta constante consoante o tipo de reforço que é utilizado, sendo de 2.5 para estribos, 2 para varões dobrados, 2.6 para lajes pré-esforçadas e 3.0 para conectores tipo perno.

Na verificação fora da zona de reforço, a segurança é feita como se não existisse armadura de punçoamento e o perímetro de controlo mantém-se a $0.5d_v$ do último perímetro de reforço conforme é indicado na Figura A.12.

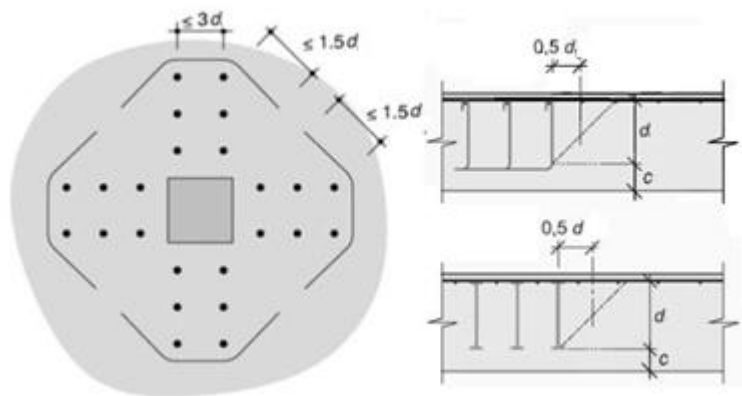


Figura A.12 – Perímetro de controlo e altura útil da laje.

4.8.6. EXEMPLOS

De forma a comparar os resultados com os diferentes códigos, estudou-se uma laje com 0.29 m de espessura sujeita a diversas distribuições de pilares, considerando um betão de classe C30/37 e uma classe de aço S500. O coeficiente η indicado nas tabelas corresponde ao inverso de β usualmente considerado nos códigos. No cálculo pelo MC10 considerou-se um diâmetro máximo do agregado de 25 mm.

Rotura por Punçoamento

Quadro 4.1. Laje simétrica apoiada em pilar interior (6x6x6x6; espessura 0,29 m; pilar ϕ_{300} ; carga distribuída de 12,5 kN/m²)

	Esf. Actuante		Cone	Tirante				estribos: 24 E $\phi 8$
	η	V_{Ed}/η		V_{Rd} não arm.	$V_{Rd,c'}$	$V_{Rd,s}$	V_{Rd} arm.	% Cobertura
SOBR	1,00	675	1116	545	404	760	1163	1,65
MC10	1,00	675	1103	551	551	776	1327	1,63
EC2	1,00	675	1244	575	432	942	1374	1,84
REBAP	1,00	675	793	496	-	-	1126	1,17

Quadro 4.2. Laje assimétrica apoiada em pilar interior (6x6x3x3; espessura 0,29 m; pilar ϕ_{300} ; carga distribuída de 12,5 kN/m²)

	Esf. Actuante		Cone	Tirante				estribos: 12 E $\phi 8$
	η	V_{Ed}/η		V_{Rd} não arm.	$V_{Rd,c'}$	$V_{Rd,s}$	V_{Rd} arm.	% Cobertura
SOBR	0,71	535	1116	545	549	380	929	1,74
MC10	1,00	519	829	415	415	525	939	1,60
EC2	0,98	531	1244	517	388	471	859	1,62
REBAP	0,60	634	793	496	-	-	563	0,89

Quadro 4.3. Laje assimétrica apoiada em pilar de bordo com consola de 3 m (6x6x3x1.5; espessura 0,29 m; pilar ϕ_{300} ; carga distribuída de 12,5 kN/m²)

	Esf. Actuante		Cone	Tirante				estribos: 12 E $\phi 8$
	η	V_{Ed}/η		V_{Rd} não arm.	$V_{Rd,c'}$	$V_{Rd,s}$	V_{Rd} arm.	% Cobertura
SOBR	0,55	694	1116	545	549	380	929	1,34
MC10	1,00	458	516	258	258	525	783	1,13
EC2	0,97	470	1244	548	411	471	882	1,88
REBAP	0,42	895	793	496	-	-	563	0,63

Quadro 4.4. Laje assimétrica apoiada em pilar de bordo e alinhada pelo mesmo (6x6x3x0.15; espessura 0,29 m; pilar ϕ_{300} ; carga distribuída de 12,5 kN/m²)

	Esf. Actuante		Cone	Tirante				estribos: 12 E $\phi 8$
	η	V_{Ed}/η		V_{Rd} não arm.	$V_{Rd,c'}$	$V_{Rd,s}$	V_{Rd} arm.	% Cobertura
SOBR	0,49	537	636	310	250	380	630	1,17
MC10	1,00	284	593	296	296	312	608	2,09
EC2	0,89	319	1244	283	212	471	684	2,14
REBAP	0,37	710	542	339	-	-	563	0,76

BIBLIOGRAFIA

- Araújo Sobreira J., (1983). *Betão armado- Punçoamento Teoria do estado limite de rotura*, Engenharia, nº3.
- Kinnunen S., Nylander H. (1960). *Punching of Concrete Slabs Without Shear Reinforcement*, Transactions of the Royal Institute of Technology, N.158, Stockholm, Suécia.
- Jones, L.L., Wood, R.H. (1967). *Yield Line Analysis of Slabs*, Clarck Irwin & Co Ltd, Londres
- Leonhardt F., Mönnig E.,(1977). *Construções de Concreto- Volume 2*, Livraria Interciência, Rio de Janeiro.
- Muttoni, A. (2008). *Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs without Transverse Reinforcement*, ACI Structural Journal, Julho-Agosto, pp.440-450.
- Muttoni, A., Ruiz, M. (2010). *MC2010: The Critical Shear Crack Theory as a mechanical model for punching shear design and its application to code provisions*, Shear and punching shear in RC and FRC elements, Outubro, Itália, pp.1-13, FIB, Salò.
- Ruiz F., Muttoni A.,(2010). *Performance and Design of Punching Shear Reinforcement Systems*, 3º Congresso Internacional da FIB, Março de 2010, Washington.
- Ribeirinho, J. (2011). *Verificação da Segurança ao Corte de Elementos de Betão Armado- Estudo e Comparação da Aplicação de Diferentes Regulamentos*, Mestrado Integrado em Engenharia Civil - 2010/2011 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2011.
- ACI Committee 318. 318M-08 Metric Building Code Requirements for Structural Concrete & Commentary. American Concrete Institute, Farmington Hills, 2008, 472 pp.
- EN 1992-1-1: 2004, "Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings".
- Federation International du Beton – FIB (2010). *Model Code 2010: First Complete Draft – volume 2*, Bulletin no 56.
- PCA Notes, *Notes on ACI318-08 Building Code, Requirements for structural concrete*, 2008.
- REBAP: Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado, Porto Editora, Porto, 1984.